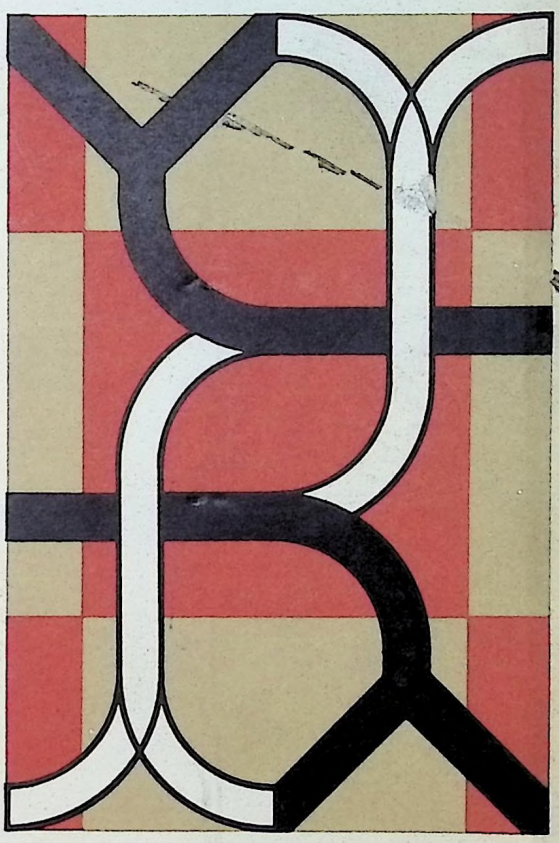
OLIVETTI

GENERAL ELECTRIC

Servizio Tecnico



CORSI DI ISTRUZIONE PROGRAMMATA

INTRODUZIONE AGLI ELABORATORI ELETTRONICI

2

LOGICA

4.615.0.200.2

CORSI DI ISTRUZIONE PROGRAMMATA

INTRODUZIONE AGLI ELABORATORI ELETTRONICI

LOGICA

2

OLIVETTI
GENERAL ELECTRIC
Servizio Tecnico

Questo volume é stato realizzato dal
GRUPPO ISTRUZIONE PROGRAMMATA
della Scuola del Servizio Tecnico

PREFAZIONE

La presente pubblicazione é rivolta a coloro che iniziano lo studio degli elaboratori elettronici. Essa fa parte di una serie di volumi preparati con il Metodo della Istruzione Programmata.

Lo scopo di questo metodo é di fornire a chi studia gli elementi essenziali per l'autoapprendimento della materia esposta.
I volumi sono organizzati in lezioni sufficientemente brevi in relazione agli argomenti trattati. Ciò consente di fare acquisire pochi concetti elementari alla volta, ma tuttavia concatenati fra loro.

In ogni lezione, una o più volte, si cerca di focalizzare l'argomento o gli argomenti di maggiore interesse, proponendo all'interessato delle domande le cui risposte, a titolo di verifica, possono essere confrontate con quelle riportate nelle pagine seguenti.

Talvolta, se la complessità della materia lo richiede, l'interessato deve eseguire, o completare, degli esercizi in modo da poter integrare, con gli stessi, le nozioni acquisite.

Per evitare la possibilità di un apprendimento frammentario, che porterebbe alla perdita della visione di insieme, sono stati predisposti dei riepiloghi di carattere generale. Ciascun riepilogo riguarda la materia esposta nelle lezioni ad esso precedenti.
Tali riepiloghi sono stati preparati in modo da consentire all'interessato di verificare il proprio grado di preparazione.

Milano, aprile 1967

METODO DI STUDIO

Il metodo che si consiglia di seguire durante lo studio si articola in più punti.

E' necessario che l'interessato non prosegua ininterrottamente lo studio per tutto il tempo che ha a disposizione, anzi é utile che stabilisca alcuni intervalli, atti a ponderare quanto studiato, con una frequenza adeguata alle proprie capacità di assimilazione.

Ogni singola lezione va studiata integralmente ed in maniera non superficiale anche se qualche volta può sembrare di facile comprensione.

L'interessato deve cercare di dare sempre le risposte alle domande che gli sono proposte, prima di controllare le stesse con le risposte riportate.

Gli esercizi vanno svolti integralmente e possibilmente discussi con eventuali colleghi di studio.

Nel "Piano di studio", e all'inizio di ogni lezione é indicato il tempo necessario a svolgerla. Detto tempo ha solo uno scopo indicativo e generalmente é da ritenersi un tempo massimo.

Onde evitare la possibilità di un apprendimento frammentario, che porterebbe alla perdita della visione di insieme, sono stati predisposti dei riepiloghi di carattere generale. Essi consistono in una serie di domande alle quali é necessario rispondere scegliendo una delle risposte riportate sotto ciascuna domanda. Ogni risposta indica il numero della domanda successiva alla quale si deve rispondere e così via.

Se l'interessato risponde in maniera errata a qualche domanda viene inviato ad una successiva, tendente a chiarire il concetto non bene interpretato. Nel caso in cui, dopo uno o più tentativi, il lettore non riesca a trovare la via esatta viene rimandato a rivedere la lezione riguardante i concetti non bene appresi.
Evidentemente, se durante lo svolgimento del riepilogo si risponde sempre in modo esatto a tutte le domande, al termine ne saranno state interessate solo un numero minimo. Tale numero minimo non é volutamente riportato nel testo.

Per poter abbandonare il questionario é necessario incontrare l'apposita indicazione.

Al termine di ogni volume, il responsabile dello "Avanzamento Studio", proporrà all'interessato un questionario riguardante la materia trattata nel volume.

Al termine del corso teorico é previsto un corso pratico da effettuarsi alla Scuola Tecnici.

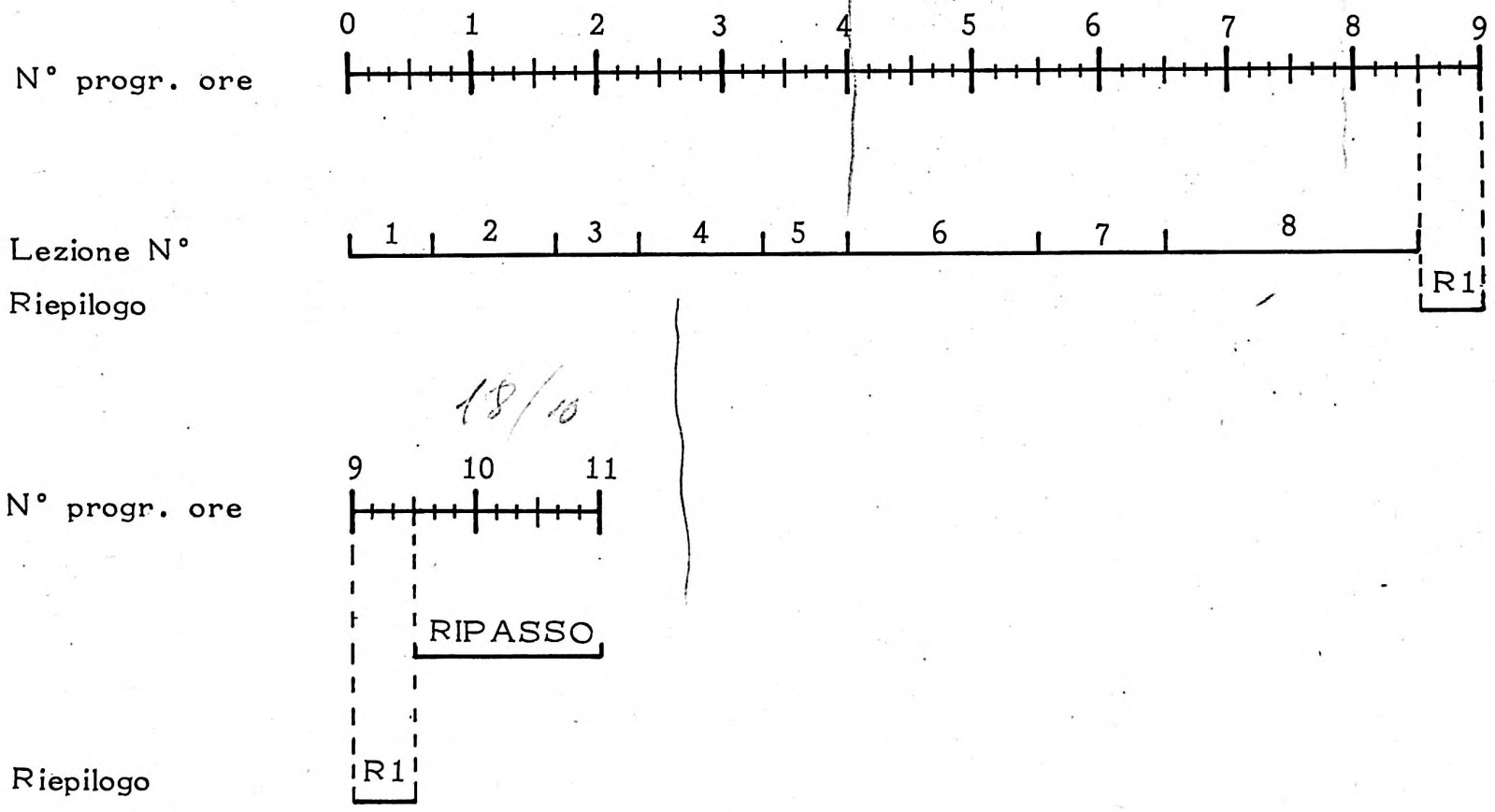
Per essere ammessi al corso pratico é necessario superare una prova teorica di carattere generale (tenuta alla Scuola) su tutto il programma svolto individualmente.

13/10 V.

17/10

PIANO DI STUDIO

18/10



INDICE

		pagine
Prefazione		V
Metodo di studio		VII ÷ VIII
Piano di studio		IX
Indice		XI
Lezione 1	: Sistemi di numerazione	1 - 1 ÷ 1 - 14
Lezione 2	: Operazioni binarie	2 - 1 ÷ 2 - 13
Lezione 3	: Codici	3 - 1 ÷ 3 - 12
Lezione 4	: Algebra di Boole	4 - 3 ÷ 4 - 12
Lezione 5	: Proprietà degli operatori booleani	5 - 1 ÷ 5 - 10
Lezione 6	: Metodi di semplificazione delle funzioni binarie	6 - 1 ÷ 6 - 14
Lezione 7	: Funzioni logiche	7 - 1 ÷ 7 - 12
Lezione 8	: Studio di un addizionatore-sottrattore binario	8 - 1 ÷ 8 - 16
Riepilogo		R - 1 ÷ R - 19

LEZIONE 1

Tempo di studio
40 minuti

1. SISTEMI DI NUMERAZIONE

1.1. Sin dall'antichità, si é presentata la necessità di rappresentare con dei simboli convenzionali delle quantità e di dare a questi simboli dei nomi e certe regole per il loro uso; si é reso quindi necessario creare un sistema di numerazione.

I criteri secondo i quali é stato scelto un sistema di numerazione piuttosto che un altro sono diversi a seconda delle origini dei sistemi stessi.

Questo vale sia per la quantità dei simboli usati, sia per la loro rappresentazione, sia per le norme che devono essere impiegate per formare un numero.

La seguente tabella può dare un'indicazione delle diversità esistenti fra alcuni sistemi di numerazione.

ARABO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
EGIZIANO												
INDU'												
CINESE												
MAYA												
ROMANO	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C	M

fig. 1.1.1

I sistemi di numerazione si differenziano fra loro, oltre che per la quantità di simboli usati, anche per il diverso valore che uno stesso simbolo può assumere a seconda della posizione che occupa in un numero.

Per esempio, la numerazione romana :

I, II, III, IV, V, VI , VII, VIII, IX, X

non dà alcuna importanza alla posizione assunta dal simbolo per esprimere un valore numerico; infatti il simbolo V significa cinque in tutti i casi, sia per esprimere il valore quattro (IV), cioé cinque meno uno, sia per esprimere il valore sette (VII), cioé cinque più due.

La numerazione araba, cioé quella comunemente usata :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

dà un diverso valore ad uno stesso simbolo quando questo occupa una diversa posizione in un numero.

Il simbolo 4, per esempio, significa quattro se non é seguito da un altro qualsiasi dei simboli di cui é costituita la numerazione stessa, ma questo valore diventa quaranta se a destra del 4 si pone un qualsiasi altro simbolo.

Ognuno dei dieci simboli può rappresentare una quantità variabile da 0 a 9. Per rappresentare una quantità di valore superiore é necessario ricorrere ad opportune combinazioni di più simboli, scritti uno accanto all'altro. Ogni combinazione forma un numero, nel quale, ogni simbolo é chiamato cifra.

In un numero con due cifre, per esempio 57, la cifra 7 occupa la posizione a destra della cifra 5.

La prima cifra di destra di un numero é definita unità, la seconda decine poiché le cifre che occupano questa posizione assumono un valore dieci volte maggiore delle unità. Con due simboli, il massimo valore che si può esprimere é 99. Così, se é necessario rappresentare un numero maggiore di 99, si deve utilizzare la combinazione di tre cifre, la terza cifra é chiamata centinaia.

Per esprimere valori superiori, si deve usare un numero maggiore di cifre.

Ogni cifra é denominata in modo diverso a seconda della posizione che occupa.

Ad esempio la quarta cifra da destra é denominata migliaia, la quinta decina di migliaia, e così via.

Questo sistema di numerazione posizionale, comunemente usato, é definito sistema decimale.

NEL SISTEMA DI NUMERAZIONE DECIMALE, OGNI POSIZIONE CHE UNA CIFRA PUO' ASSUMERE IN UN NUMERO E' DEFINITA "RANGO DECIMALE".

Ogni rango decimale é rappresentato con potenze di base 10 ad esponente variabile.

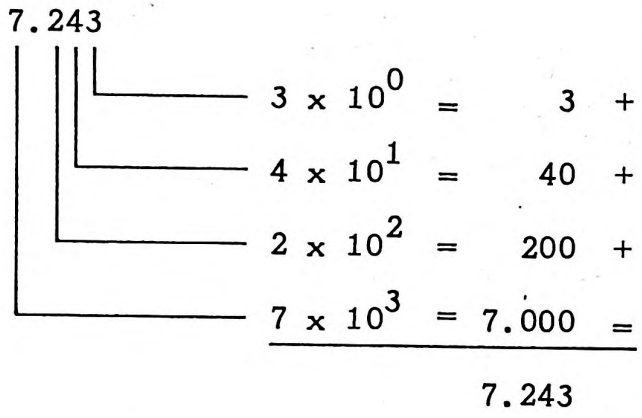
Il valore dell'esponente indica il valore del rango decimale :

$10^0 = 1 =$ unità

$10^1 = 10 =$ decine

$10^2 = 100 =$ centinaia

Così, un numero può essere rappresentato con potenze di base 10, per esempio :



le cifre 7, 2, 4 e 3 sono coefficienti delle potenze in base dieci.

I sistemi di numerazione si differenziano, come si é visto, anche per la quantità di simboli usati.

Per esempio, il sistema decimale usa dieci cifre :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

mentre la numerazione romana ne usa sette :

I, V, X, L, C, D, M

Corrispondenti ai valori decimali

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000

Esistono dei sistemi di numerazione con base diversa da 10. Fra essi si possono citare i seguenti :

- sistema ottale
- sistema binario.

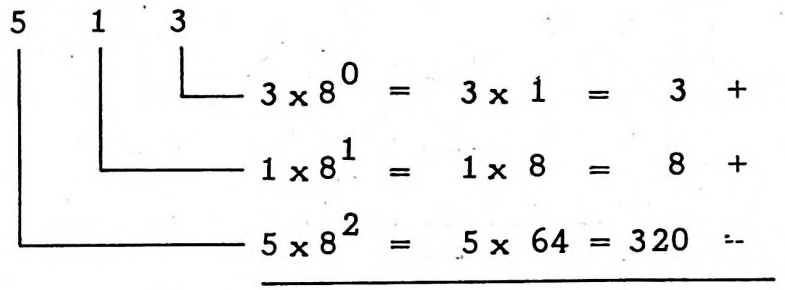
1.2. Sistema ottale.

Nel sistema ottale si usano i seguenti simboli :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

La potenza del sistema ottale ha per base 8.

Per riconoscere un numero ottale si scrive il numero stesso con pedice 8. Ad esempio, 513_8 corrisponde in decimale a :



Come si nota dall'esempio, anche le cifre che compongono un numero ottale rappresentano i coeffi - cienti delle potenze in base 8.

Tali potenze, in relazione al loro esponente sono disposte in ordine crescente da destra verso sinistra ..... 8^4, 8^3, 8^2, 8^1, 8^0.

1.3. Sistema binario.

E' un sistema di numerazione che ha particolari utilizzazioni. Esso utilizza solamente due cifre :

1 o 0 (uno o zero).

per cui un numero binario si presenta come una successione di 1 e di 0. Ad esempio, il numero decimale 21, ha la seguente configurazione binaria :

1 0 1 0 1

$1 \times 2^0 = 1 +$

$0 \times 2^1 = 0 +$

$1 \times 2^2 = 4 +$

$0 \times 2^3 = 0 +$

$1 \times 2^4 = 16 =$

21 (decim.)

Ogni potenza di base due ha, in funzione del valore dell'esponente, un diverso valore definito PESO BINARIO.

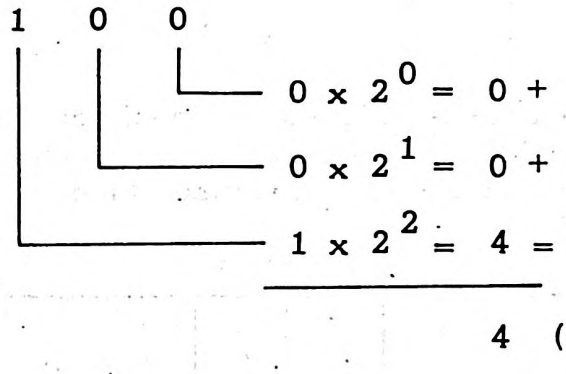
Ad ogni peso binario, corrisponde un diverso valore decimale :

Peso Binario	2^{12}	2^9	2^8	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valore Decimale	4096	512	256	16	8	4	2	1

fig. 1.3.1

Il sistema binario é l'unico che consente di utilizzare soltanto due simboli per rappresentare un numero qualsiasi. I coefficienti di ogni peso binario possono assumere soltanto i valori 1 e 0. Ciò consente di indicare la presenza, di un peso binario se il coefficiente é 1; di indicare l'assenza di un peso binario se il coefficiente é 0.

Nel seguente esempio :



si può notare che il valore decimale 4 é espresso dalla presenza del peso binario 2^2 e dalla assenza dei pesi binari 2^0 e 2^1.

Dallo stesso esempio si ricava che il sistema binario é anch'esso un sistema di numerazione posizionale, cioé ogni cifra 1 di un numero binario, assume "valore" diverso a seconda della posizione che occupa nel numero.

Per convenzione, i pesi binari sono disposti in ordine crescente da destra verso sinistra, per cui, in ogni numero binario la prima cifra a destra rappresenta il peso 2^0, la seconda il peso 2^1, la terza cifra da destra il peso 2^2 , ecc.

Generalmente, anziché usare la denominazione "peso binario" si usa il termine "bit" che corrisponde alla abbreviazione delle parole inglesi " BInary digiT".

SI DEFINISCE "BIT" LA CIFRA CHE IN UN NUMERO BINARIO RAPPRESENTA UN PESO BINARIO E CHE PUO' ASSUMERE IL VALORE 1 O IL VALORE 0.

Per riconoscere il valore decimale di un bit é una consuetudine denominare i bit con lettere minuscole disposte in ordine alfabetico da destra verso sinistra.

fig. 1.3.2

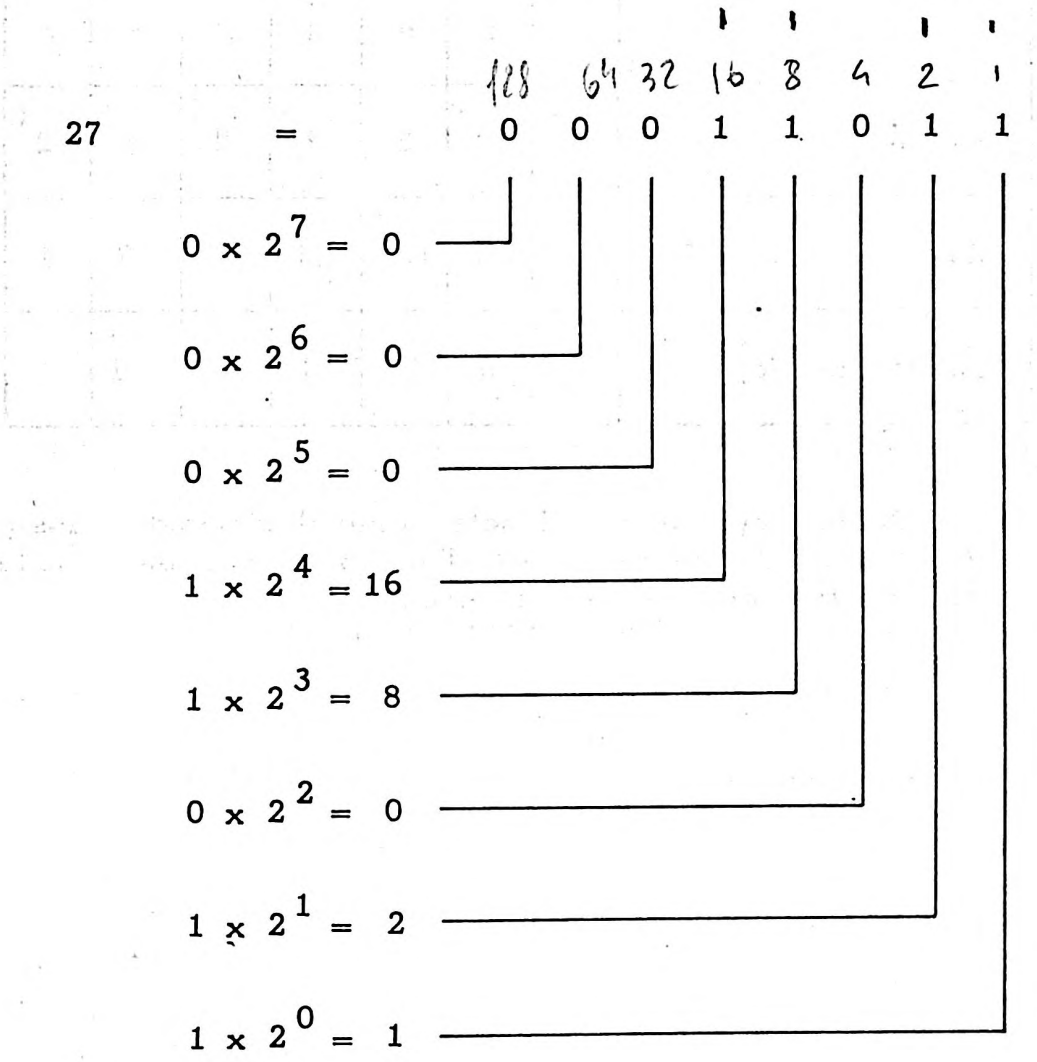
bit	e	d	c	b	a
peso binario	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
valore decimale	16	8	4	2	1

Come si é già visto, esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri binari e numeri decimali.

Se si vuole esprimere il numero decimale 27 in modo binario, avendo a disposizione 8 pesi binari, da 2^0 a 2^7, si procede nel seguente modo :

- si cercano fra i pesi binari a disposizione quelli che sommati fra loro, danno un valore decimale eguale a 27.

- ricordando che nel sistema binario si hanno soltanto due simboli, si indicano con 1 i pesi scelti per formare il numero 27 e con 0 gli altri pesi.
  Si ottiene una successione di 1 e di 0 che rappresenta in modo binario il numero decimale 27.



Il prospetto ricavato nella pagina precedente può essere rappresentato con la seguente tabella :

bit	h	g	f	e	d	c	b	a
peso bin.	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
valore decim.	128	64	32	16	8	4	2	1
numero binario	0	0	0	1	1	0	1	1

fig. 1.3.3

Dall'esempio fatto, si nota come il simbolo 1 assume un valore, cioé un peso, diverso a seconda della posizione che occupa nel numero.

DOMANDE

a) - Si scrivano in binario i seguenti numeri decimali, supponendo di avere a disposizione nove pesi binari $2^0 \div 2^8$:

105, 15, 257, 170, 6,

128, 511, 0, 255, 99,

b) - Si scrivano in decimale i seguenti numeri binari :

001100110, 111000111, 101010101,

101000011, 111111111, 000010110,

RISPOSTE

a) -

	256	128	64	32	16	8	4	2	1
105	0	0	1	1	0	1	0	0	1
15	0	0	0	0	0	1	1	1	1
257	1	0	0	0	0	0	0	0	1
170	0	1	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
128	0	1	0	0	0	0	0	0	0
511	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
255	0	1	1	1	1	1	1	1	1
99	0	0	1	1	0	0	0	1	1

b) -

	256	128	64	32	16	8	4	2	1
102	0	0	1	1	0	0	1	1	0
455	1	1	1	0	0	0	1	1	1
341	1	0	1	0	1	0	1	0	1
323	1	0	1	0	0	0	0	1	1
511	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	0	0	0	0	1	0	1	1	0

LEZIONE 2

Tempo di studio
1 ora

2. OPERAZIONI BINARIE

2.1. Le cifre utilizzate nel sistema binario, 1 e 0, possono essere facilmente rappresentate con due diversi stati fisici :

- presenza (1) e assenza (0) di una tensione
- presenza (1) e assenza (0) di una perforazione in una scheda
- contatto chiuso (1) e aperto (0)
- stato di un flip-flop ecc.

Data la facilità di realizzare due stati fisici, come quelli sopra menzionati, il sistema binario é utilizzato negli elaboratori elettronici. Questi eseguono le operazioni aritmetiche, oltre a particolari operazioni che sono esposte nelle lezioni seguenti.

E' quindi opportuno analizzare come possono essere eseguite le operazioni aritmetiche con numeri binari.

Si ricorda che un bit rappresenta un peso binario di valore diverso a seconda della posizione che il bit occupa nel numero binario.

Ad esempio, il bit 1 nel numero binario 0100 rappresenta il peso binario $2^2 = 4$.

Si supponga di dover eseguire la seguente somma binaria :

$$\begin{array}{ccc} 0101 & + & 0110 \\ (5) & & (6) \end{array}$$

Non conoscendo nessuna regola per la somma dei bit si procede nel seguente modo :

- si scrive al posto dei bit con valore 1 il corrispondente peso binario

- si esegue la somma sui valori decimali dei pesi binari e si scrive poi il risultato sotto forma di peso binario

- si indica con 1 la presenza di un peso binario e con 0 la sua assenza. Si ottiene un numero binario che é la somma dei due in esame.

	2^3	2^2	2^1	2^0
0101 = 5	0	$2^2 = 4$	0	$2^0 = 1$
0110 = 6	0	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	0
Risultato	0	$2^2+2^2 = 4+4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
Valore decim.	0	8	2	1

fig. 2.1.1

Dalla tabella si nota che sommando due pesi binari 2^2 si ottiene il valore decimale 8 che corrisponde al peso binario 2^3. Anziché indicare, quale risultato della somma, assenza di peso binario 2^3 e presenza di due pesi binari 2^2, si indica presenza di 2^3 e assenza 2^2 :

	2^3	2^2	2^1	2^0
Risultato	2^3	0	2^1	2^0

fig. 2.1.2

Se ora si indica con il valore 1 la presenza di un peso binario si ottiene il numero binario

1011

che rappresenta il risultato della somma (5+6= 11 in valore decimale).

L'esempio sopra esposto consente di ricavare alcune regole fondamentali delle somme di numeri binari:

0 +	1 +	0 +	1 +	
1 =	0 =	0 =	1 =	
1	1	0	0	con un riporto di 1 da sommare al bit (a sinistra) di peso binario superiore.

In base a queste regole, per sommare due numeri binari, si evita il laborioso procedimento sopra esposto.

Ad esempio per eseguire la somma binaria dei valori decimali 53 e 57 si procede nel seguente modo:

Valore decim.		Valore binario
53	⟶	110101
57	⟶	111001

1°) - Si somma bit per bit segnando a parte l'eventuale riporto.

2°) - Alla somma parziale ottenuta si sommano i riporti.

Si segua il procedimento sopra descritto :

1°)

	1	1	0	1	0	1	+
	1	1	1	0	0	1	=
	0	0	1	1	0	0	Somma parz.
	1	1	0	0	1	0	Riporti
MC	64	32		8	4	2	

2°)

	0	0	1	1	0	0	+ Somma parz.
1	1	0	0	0	1	0	= Riporti
1	1	0	1	1	1	0	Risultato finale = 110
64	32	16	8	4	2	1	

Il risultato finale 1101110 ha valore decimale 110 che corrisponde a 53 + 57.

DOMANDE

Si eseguano le addizioni binarie indicate nelle seguenti domande :

a) - 0001 +
0100 =

b) - 101110 +
011101 =

c) - 011111 +
010101 =

d) - 010111 +
101111 =

e) - 11111 +
00001 =

RISPOSTE

Si verifichino i risultati ottenuti con quelli sottoelencati :

a) - 0101

b) - 1001011

c) - 110100

d) - 1000110

e) - 100000

2.2. Come per i numeri decimali é possibile eseguire la differenza anche fra due numeri binari.

In questo caso esistono regole diverse da quelle della somma binaria.

Procedendo in modo analogo a come descritto nel paragrafo 2.1., si dà un esempio di sottrazione binaria per ricavarne le regole fondamentali.

Si esegue la sottrazione :

1110 - 0101

(14 - 5)

	2^3	2^2	2^1	2^0
1110	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	0
0101	0	$2^2 = 4$	0	$2^0 = 1$

fig. 2.2.1

Per il primo peso binario si ha $0 - 2^0$.

Si procede come nelle sottrazioni decimali, si prende in prestito una unità dalla posizione più a sinistra, cioé un peso 2^1.

Si ha così $2^1 - 2^0$. Ricordando che $2^0 = 1$ e $2^0 + 2^0 = 2^1$, per cui $2^1 - 2^0 = 2^0$, cioé presenza di 2^0 e assenza 2^1.

Il risultato che si ottiene é il seguente :

	2^3	2^2	2^1	2^0
1110	2^3	2^2	2^1	0
0101	0	2^2	0	2^0
Risultato	2^3	0	0	2^0
Val.decim.	8	0	0	1
Val.binario	1	0	0	1

14 -
5 =
9

fig. 2.2.2

Dall'esempio si ricavano le seguenti regole :

1 -	1 -	0 -	0 -
0 =	1 =	0 =	1 =
1	0	0	1

Con un riporto di 1 che si deve sottrarre al bit di peso binario superiore.

Utilizzando queste regole si può eseguire direttamente la sottrazione con i numeri binari.

Si procede in momenti successivi :

- si esegue la sottrazione bit a bit fra i due numeri ottenendo, in caso di riporti, un risultato parziale e, in mancanza di riporti, il risultato finale.

- nel caso di risultato parziale si sottraggono a questo i riporti ottenendo il risultato finale.

1	1	1	0	-	
0	1	0	1	=	
1	0	1	1	-	Risultato parziale
		1		=	Riporti
1	0	0	1		Risultato finale

DOMANDE

Si eseguano le seguenti sottrazioni binarie :

a) - 1111 -
0101 =
1010
.....

b) - 1011 -
0110 =
0101
.....

c) - 0110 -
0100 =
0010
.....

d) - 1000 -
0001 =
.....

1000
0001
1001
1.
0111

RISPOSTE

a) - 1010

b) - 0101

c) - 0010

d) - 0111

2.3. Con il sistema di numerazione binaria, si possono eseguire tutte le operazioni aritmetiche, quindi anche la moltiplicazione e la divisione.

Si descrive brevemente soltanto il modo di eseguire una moltiplicazione in quanto, sia la moltiplicazione che la divisione, sono eseguite, negli elaboratori elettronici, in differenti modi nei diversi elaboratori.

Avendo già chiarito le regole della somma binaria, la moltiplicazione non richiede una particolare descrizione.

Si eseguono i prodotti parziali con le regole :

$1 \cdot 1 = 1 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 1 \quad 0 \cdot 0 = 0$

e quindi si sommano.

Ad esempio :

$7 \times 5 = 35$

1 1 1 x.	7 x
1 0 1 =	5 =
1 1 1	
0 0 0	
1 1 1	
1 0 0 0 1 1	35

32 16 8 4 2 1

$2^5 + 2^1 + 2^0 = 32 + 2 + 1 = 35.$

LEZIONE 3

Tempo di studio
40 minuti

3. CODICI

3.1. Si é osservato che il sistema binario presenta il vantaggio, rispetto agli altri, di utilizzare soltanto due simboli.

Si noti ora che il sistema binario ha lo svantaggio di richiedere un numero di cifre superiore al sistema decimale per rappresentare un numero di eguale valore.

Ad esempio, il numero binario :

1011001001110

Corrisponde al numero decimale :

5710 (4096 + 1024 + 512 + 64 + 8 + 4 + 2).

Inoltre, un numero binario composto da un grande numero di bit risulta di difficile"traduzione" in un numero decimale.

Per facilitare il passaggio da un sistema di numerazione all'altro, a volte, si usa esprimere un numero con un terzo sistema il quale riunisce in se le caratteristiche sia di quello decimale sia di quello binario.

In esso viene mantenuta l'organizzazione delle cifre in ranghi decimali, ed il valore delle cifre stesse viene espresso in binario mediante quattro bit.

Con questo sistema il numero 5710 dell'esempio viene espresso nel modo seguente : Semibinario

Rango decim.	migliaia	centinaia	decine	unità
bit	d c b a	d c b a	d c b a	d c b a
valore binario	0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 0 1	0 0 0 0
valore decim.	5	7	1	0

dove bit a = 2^0 bit b = 2^1 bit c = 2^2 bit d = 2^3

Si noti che sebbene aumenta la quantità complessiva di bit utilizzati, l'interpretazione di un numero binario così rappresentato risulta più facile. Per esprimere in binario le cifre decimali da 0 a 9 sono stati utilizzati quattro pesi binari per rango decimale :

$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$.

Con quattro pesi binari si possono però ottenere 16 diverse combinazioni, ma se ne utilizzano soltanto dieci per rappresentare le dieci cifre decimali. Nella seguente tabella si mettono in evidenza le combinazioni binarie alle quali si fanno corrispondere le cifre decimali.

Numero delle combinazioni

Pesi binari	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						

Valori decimali

fig. 3.1.1

3.2. Nella prima lezione sono stati esaminati alcuni sistemi di numerazione e si é posta particolare attenzione al sistema binario per la sua utilizzazione negli elaboratori elettronici.

Generalmente, negli elaboratori, non sono introdotti soltanto dei numeri ma anche dei simboli diversi quali sono i comuni caratteri alfabetici :

A, B, C....., X, Y, Z

e particolari segni convenzionali :

. , ; : / - % & £ $, ecc.

Si presenta la necessità di definire un sistema di identificazione di questi caratteri in modo semplice, con la combinazione di soli due simboli, 1 e 0, in modo analogo al sistema di numerazione binario.

La zona circoscritta, della tabella di fig. 3.1.1, indica l'insieme di numeri binari che rappresentano i dieci simboli decimali 0 ÷ 9.

Per rappresentare in binario un simbolo diverso, ad esempio un carattere alfabetico, si possono utilizzare le combinazioni binarie corrispondenti ai valori decimali 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Si può quindi stabilire, per convenzione, che la combinazione binaria 1010 rappresenta la lettera A; la configurazione binaria 1011 rappresenta la lettera B, ecc.

Usando però soltanto quattro bit si possono ottenere al massimo 16 diverse combinazioni di cui, dieci usate per rappresentare le cifre decimali, le rimanenti per indicare lettere dell'alfabeto o segni convenzionali.

Le lettere dell'alfabeto sono 26, se si tiene conto anche di un certo numero di segni convenzionali si comprende facilmente che occorre un numero maggiore di combinazioni diverse per esprimere in binario l'insieme delle cifre decimali, delle lettere e dei segni convenzionali.

Usando 5 bit si possono ottenere solo 32 combinazioni perciò normalmente si usano 6 bit per mezzo dei quali si ottengono 64 diverse combinazioni.

Ad ognuna delle 64 combinazioni binarie si può far corrispondere, per convenzione, uno dei 64 simboli desiderati. Nella fig. 3.2.1 é riportata, come esempio, una codifica di 64 simboli diversi.

L'insieme delle combinazioni binarie riportate in fig. 3.2.1 é denominato CODICE BINARIO.

SI DEFINISCE CODICE BINARIO OGNI SISTEMA DI RAPPRESENTAZIONE BINARIA DI UN CERTO NUMERO DI SIMBOLI.

Un altro termine molto usato, nel campo degli elaboratori elettronici é : CARATTERE.

SI DEFINISCE CARATTERE DI UN CODICE BINARIO UNA QUALSIASI COMBINAZIONE CHE AD ESSO APPARTIENE. AD OGNI COMBINAZIONE BINARIA (CARATTERE) SI FA CORRISPONDERE UN SIMBOLO CHE PUO' ESSERE UNA CIFRA, UNA LETTERA, OPPURE UN SEGNO CONVENZIONALE.

Codice Binario

32	16	BIT 8	4	2	1	Carattere	32	16	BIT 8	4	2	1	Carattere
f	e	d	c	b	a		f	e	d	c	b	a	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	W
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	X
0	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	1	0	Y
0	0	0	0	1	1	3	1	0	0	0	1	1	Z
0	0	0	1	0	0	4	1	0	0	1	0	0	&
0	0	0	1	0	1	5	1	0	0	1	0	1	£
0	0	0	1	1	0	6	1	0	0	1	1	0	%
0	0	0	1	1	1	7	1	0	0	1	1	1	ç
0	0	1	0	0	0	8	1	0	1	0	0	0	@
0	0	1	0	0	1	9	1	0	1	0	0	1	"
0	0	1	0	1	0	A	1	0	1	0	1	0	'
0	0	1	0	1	1	B	1	0	1	0	1	1	(
0	0	1	1	0	0	C	1	0	1	1	0	0	)
0	0	1	1	0	1	D	1	0	1	1	0	1	^
0	0	1	1	1	0	E	1	0	1	1	1	0	°
0	0	1	1	1	1	F	1	0	1	1	1	1	)
0	1	0	0	0	0	G	1	1	0	0	0	0	+
0	1	0	0	0	1	H	1	1	0	0	0	1	-
0	1	0	0	1	0	I	1	1	0	0	1	0	x
0	1	0	0	1	1	J	1	1	0	0	1	1	:
0	1	0	1	0	0	K	1	1	0	1	0	0	!
0	1	0	1	0	1	L	1	1	0	1	0	1	/
0	1	0	1	1	0	M	1	1	0	1	1	0	.
0	1	0	1	1	1	N	1	1	0	1	1	1	;
0	1	1	0	0	0	O	1	1	1	0	0	0	,
0	1	1	0	0	1	P	1	1	1	0	0	1	?
0	1	1	0	1	0	Q	1	1	1	0	1	0	=
0	1	1	0	1	1	R	1	1	1	0	1	1	≠
0	1	1	1	0	0	S	1	1	1	1	0	0	>
0	1	1	1	0	1	T	1	1	1	1	0	1	<
0	1	1	1	1	0	U	1	1	1	1	1	0	*
0	1	1	1	1	1	V	1	1	1	1	1	1	→

fig. 3.2.1

Il codice binario, come qualsiasi altro tipo di codice, é una convenzione per cui uno stesso "carattere" può rappresentare un simbolo diverso a seconda del tipo di codice.

Varie sono le ragioni che suggeriscono di realizzare un codice binario formato in un certo modo.

In questa sede ci si limita ad osservare l'organizzazione di alcuni codici binari. A questo scopo si riporta :

- il codice ISO (fig. 3.2.2)

- il codice Hollerith (fig. 3.2.3)

Il codice ISO é formato da sette pesi binari. Delle 128 combinazioni possibili se ne sono usate soltanto 64; le rimanenti servono per scopi particolari che possono essere esaminati solo nello studio degli elaboratori che le utilizzano.

cn. ISO

PESI BINARI				64	0	0	0	0	1	1	1	1
				32	0	0	1	1	0	0	1	1
				16	0	1	0	1	0	1	0	1
8	4	2	1									
0	0	0	0				£	0	@	P		
0	0	0	1				!	1	A	Q		
0	0	1	0				"	2	B	R		
0	0	1	1				#	3	C	S		
0	1	0	0				$	4	D	T		
0	1	0	1				%	5	E	U		
0	1	1	0				&	6	F	V		
0	1	1	1				'	7	G	W		
1	0	0	0				(	8	H	X		
1	0	0	1				)	9	I	Y		
1	0	1	0				*	:	J	Z		
1	0	1	1				+	;	K	[		
1	1	0	0				,	<	L	\		
1	1	0	1				-	=	M	]		
1	1	1	0				.	>	N	↑		
1	1	1	1				/	?	O	←		

fig. 3.2.2

0 = 32+6 = 48

1 = = 49

2 = = 50

3 = 51

4 = 52

Code Hollerith

In fig. 3.2.3 é riportato il codice Hollerith che utilizza 8 pesi binari. Anche per questo codice, come per quello ISO, sono utilizzate soltanto 64 combinazioni binarie delle 256 possibili; le altre possono avere usi particolari.

		h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		g	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
		f	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
		e	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d	c	b	a															
0	0	0	0				0	ß					^	+				
0	0	0	1				1	A					J	/				
0	0	1	0				2	B					K	S				
0	0	1	1				3	C					L	T				
0	1	0	0				4	D					M	U				
0	1	0	1				5	E					N	V				
0	1	1	0				6	F					O	W				
0	1	1	1				7	G					P	X				
1	0	0	0				8	H					Q	Y				
1	0	0	1				9	I					R	Z				
1	0	1	0				[	&					-	\				
1	0	1	1				#	.					ß	,				
1	1	0	0				_	]						%				
1	1	0	1				:	(					)	=				
1	1	1	0				>	<					;	"				
1	1	1	1				?	\					'	!				

fig. 3.2.3

64/256

I codici sono una convenzione.

DOMANDE

a) - Che cosa é un codice binario ?

rappresenta con codice binario cifre o lettere (caratteri)

b) - Si può rappresentare il carattere alfabetico X con la seguente combinazione binaria ?

64 16 8 4 1
1011101

No è errato secondo Hollerith e ISO

ma nessuno vieta di farlo.

c) - Quanti bit sono necessari per formare un codice di 32 caratteri diversi ?

(5) 6 senza considerare lo zero

d) - Quale configurazione binaria ha il carattere Z nel codice Hollerith ?

a n c f h

10111001

11111

RISPOSTE

a) - E' un sistema di rappresentazione binaria di un certo numero di caratteri.

b) - Si; qualsiasi carattere può assumere qualsiasi configurazione binaria perché la formazione di un codice é una convenzione.
Se una configurazione binaria di un carattere é riferita ad un certo codice, questa é unica.

c) - Con 5 bit si possono ottenere 32 diverse combinazioni. considerando anche lo zero

d) - In codice Hollerith, il carattere Z ha la seguente configurazione ?

10111001

LEZIONE 4

Tempo di studio
1 ora

4. ALGEBRA DI BOOLE

4.1. Gli elaboratori elettronici eseguono un certo numero di operazioni che si possono suddividere in due gruppi :

- operazioni aritmetiche

- operazioni logiche

Le regole riguardanti le operazioni aritmetiche di somma e sottrazione di numeri binari sono state esposte nella lezione N° 2.

E' ora necessario analizzare le regole delle operazioni logiche.

La definizione "operazioni logiche" é usata per indicare tutte le operazioni non aritmetiche eseguite da un elaboratore.

Le operazioni logiche che un elaboratore elettronico può eseguire sono determinate da un insieme di regole particolari.

Come per i simboli decimali esiste un sistema di elementi : proprietà, operazioni, postulati, teoremi, che ne regola la loro utilizzazione; così per i simboli binari esiste un sistema di elementi, per i quali sono definite certe proprietà e certe operazioni che ora é necessario esaminare per comprendere la loro logica di elaborazione.

Il citato sistema di elementi é denominato :

ALGEBRA di BOOLE

(George Boole fu un matematico inglese del secolo scorso) l'algebra booleana opera sui due simboli 1 e 0 i quali sono combinati fra loro per mezzo di due segni denominati operatori .

Essi sono :

\+ (operatore di somma booleana)
· (operatore di prodotto booleano)

Le operazioni (+ e ·), in base alle quali i due simboli possono essere combinati in modi diversi danno luogo alle seguenti definizioni :

$0 + 0 = 0$	(1)	$0 \cdot 0 = 0$	(5)
$0 + 1 = 1$	(2)	$0 \cdot 1 = 0$	(6)
$1 + 0 = 1$	(3)	$1 \cdot 0 = 0$	(7)
$1 + 1 = 1$	(4)	$1 \cdot 1 = 1$	(8)

Un'altra particolare operazione é la seguente :

$\overline{1} = 0$ (9) $\overline{0} = 1$ (10)

La sopralineatura indica l'operazione di inversione o complementazione.

Si noti un particolare molto importante delle operazioni sopraesposte (+, ·, $\overline{\ }$) :
tutti i risultati ottenuti sono ancora 1 e 0.

Ciò significa che le operazioni in esame possono essere applicate anche in espressioni complesse di algebra booleana senza che il risultato assuma un valore diverso da quello espresso da una successione di 1 e 0.

Prima di esaminare alcune proprietà degli operatori booleani, si procede ad una verifica empirica di alcune definizioni scelte fra quelle date (1) ÷ (10).

A questo scopo si assumono le seguenti convenzioni :

- l'operatore booleano + corrisponde ad un circuito parallelo
- l'operatore booleano · corrisponde ad un circuito serie
- si assegna il simbolo 1 ad un circuito chiuso (contatto chiuso, segnale presente, ecc.)
- si assegna il simbolo 0 ad un circuito aperto (contatto aperto, segnale assente ecc.).

Si osservi il seguente esempio :

fig. 4.1.1

la lampadina L può accendersi soltanto con il contatto X chiuso (X = 1). Se si indica con L (L = 1) la lampada accesa con $\overline{L}$ (L = 0) la lampadina spenta, con X (X=1) il contatto chiuso, e con $\overline{X}$ (X = 0) il contatto aperto, si possono scrivere le seguenti espressioni booleane:

$$L = X \qquad \overline{L} = \overline{X}$$

$$(1) = (1) \qquad (0) = (0)$$

Si verificano, ora, alcune definizioni date.

Ad esempio, la definizione (4) può essere così rappresentata : 1 + 1 = 1

X + Y = L

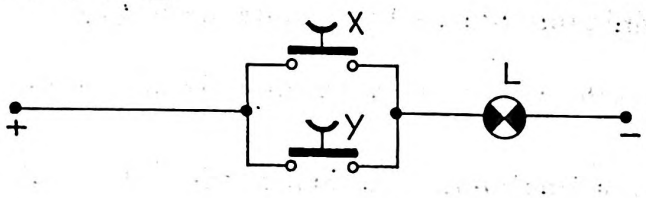


fig. 4.1.2

Il circuito può essere interpretato nel seguente modo :

se si chiude X (X = 1)
OPPURE (operatore +)
se si chiude Y (Y = 1)
si accende la lampadina indicando la presenza di un certo evento (L = 1).

Procedendo nello stesso modo si realizza un circuito relativo alla definizione (8) : 1 x 1 = 1

X · Y = L

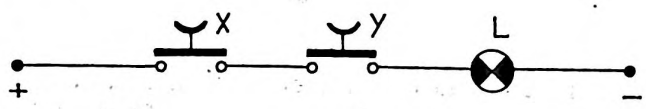


fig. 4.1.3

In questo caso solo se contemporaneamente :

si chiude X (X = 1)
E (operatore ·)
si chiude Y (Y = 1)
si accende la lampadina indicando un certo evento (L = 1).

La definizione (10) può essere dimostrata utilizzando un circuito invertitore. (Si veda l'inverter spiegato nel volume "Transistori-Teoria ed applicazioni").

$$\bar{0} = 1$$

fig. 4.1.4

Cioé l'inverter ha la funzione logica di invertire o, in altri termini, di complementare il segnale di ingresso.

4.2. Le definizioni, presentate nel precedente paragrafo, possono essere verificate con alcuni circuiti che sono stati presentati nel volume "Transistori-Teoria ed applicazioni".

Ad esempio, si possono verificare le definizioni (2) e (6), rispettivamente con un OR e con un AND.

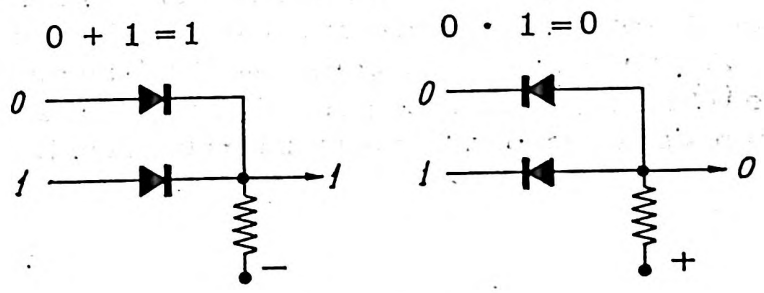


fig. 4.2.1

Si osservi che il circuito OR é rappresentato con simboli combinati tra loro per mezzo dell'operatore booleano + . Infatti anche le definizioni (1), (3) e (4) sono rappresentate da un circuito OR come é facilmente ricavabile.

Il circuito AND é espresso dall'operatore booleano (·) .

Se si riportano le definizioni relative al circuito OR in una tabella, e quelle relative al circuito AND in un'altra, si ottengono due tabelle eguali a quelle esaminate nello studio dei circuiti stessi.

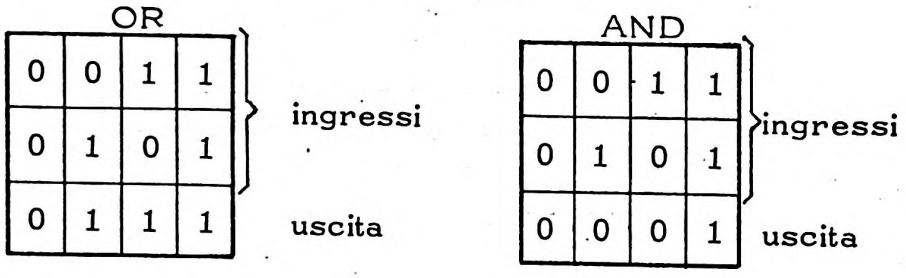


fig. 4.2.2

Dalle considerazioni sin quì fatte si deduce che :

- l'operatore booleano + é utilizzato sia per esprimere la funzione logica di un circuito parallelo che di un circuito OR.

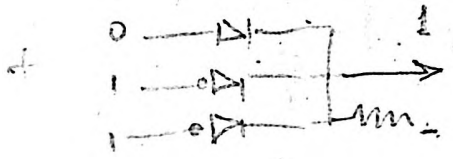
- l'operatore booleano (·) é utilizzato per esprimere la funzione logica del circuito serie e del circuito AND.

Generalmente l'operatore booleano (.) non é indicato ed é sottointeso come avviene nell'algebra ordinaria. Più precisamente si consiglia l'omissione dell'operatore (.) in tutti quei casi per cui l'omissione stessa non può dare luogo ad errate interpretazioni.

DOMANDE

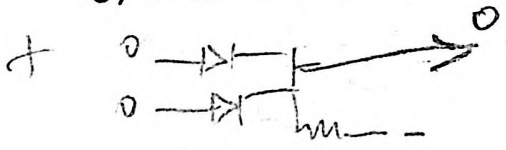
Si disegni, per ognuna delle seguenti espressioni booleane, il relativo circuito :

a) - 0 + 1 + 1 = 1



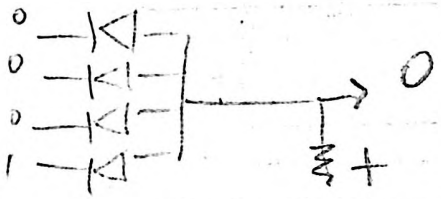
b) - 1 + 1 + 1 = 1

c) - 0 + 0 = 0



d) - 1 · 1 · 0 = 0

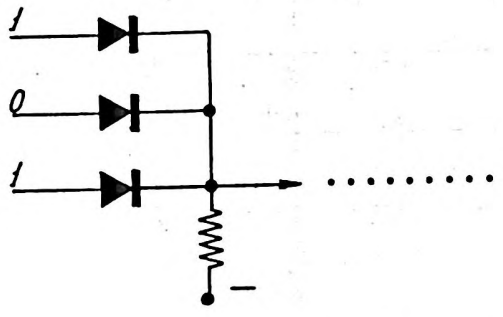
e) - 0 · 0 · 0 · 1 = 0



f) - 1 · 1 = 1

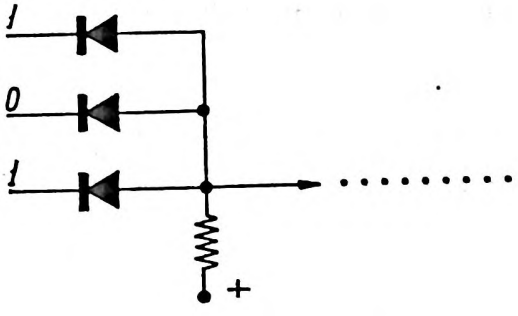
Si ricavi per ognuno dei seguenti circuiti l'espressione booleana che li rappresenta :

g) -



1 + 0 + 1 = 1

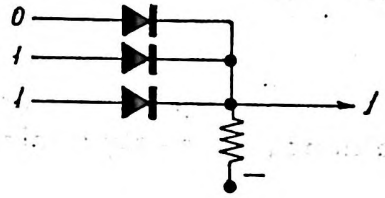
h) -



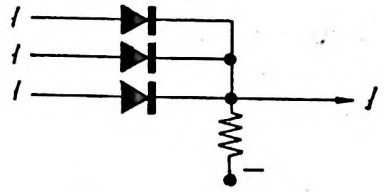
1 × 0 × 1 = 0

RISPOSTE

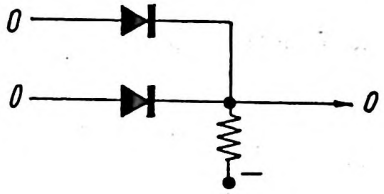
a) - 0 + 1 + 1 = 1



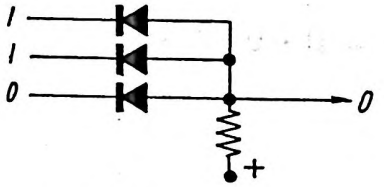
b) - 1 + 1 + 1 = 1



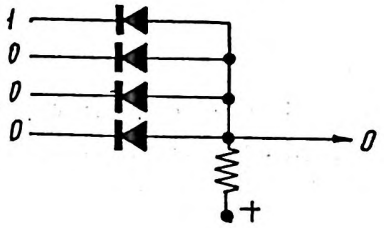
c) - 0 + 0 = 0



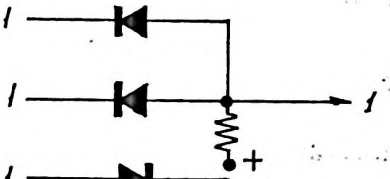
d) - 1 · 1 · 0 = 0



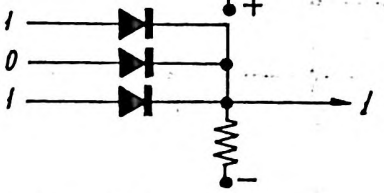
e) - 0 · 0 · 0 · 1 = 0



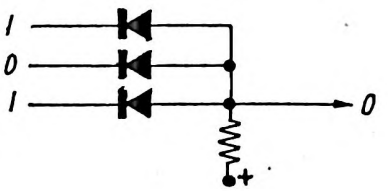
f) - 1 · 1 = 1



g) - 1 + 0 + 1 = 1



h) - 1 · 0 · 1 = 0



4.3. Per rappresentare, in modo semplice, un insieme di circuiti OR e AND si assegnano, per convenzione i seguenti simboli :

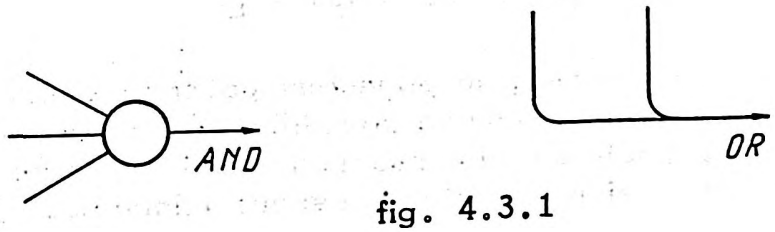
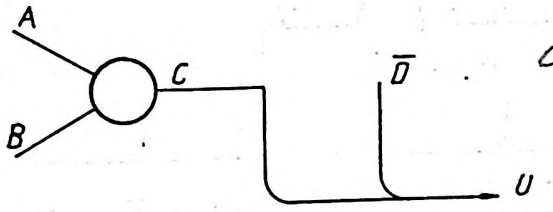


fig. 4.3.1

Se si ha un circuito così costituito :



$u = A \cdot B + \overline{D}$

fig. 4.3.2

e si desidera indicare lo stesso con una espressione booleana, si procede nel seguente modo :

- l'uscita dell' AND é rappresentata dal prodotto dei due segnali in ingresso

$$C = A \cdot B \quad (1)$$

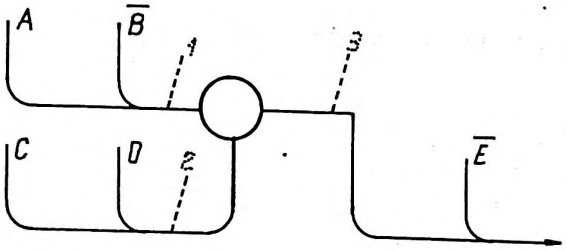
- l'uscita dell'OR é rappresentato dalla somma dei due segali in ingresso

$$U = C + \overline{D} \quad (2)$$

Per esprimere l'uscita U con una unica relazione, si sostituisce nella (2) il valore di C con la (1) e si ottiene :

$$U = (A \cdot B) + \overline{D}$$

In questo caso, le parentesi possono essere omesse, ma ciò non é sempre possibile. Ad esempio, nell'espressione booleana che rappresenta il seguente circuito, le parentesi non possono essere eliminate.



$$\underbrace{\Big[\underbrace{(A + \overline{B})}_{1}\underbrace{(C + D)}_{2}\Big]}_{3} + \overline{E} = U$$

fig. 4.3.3

Se si eliminassero le parentesi si otterrebbe la seguente espressione:

$$A + \overline{B} \cdot C + D + \overline{E} = U$$

alla quale corrisponde il seguente circuito :

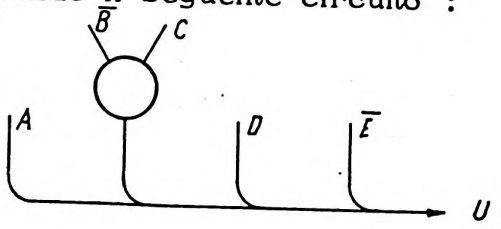


fig. 4.3.4

L'uso delle parentesi (, [e { nell'algebra booleana é eguale a quella dell'algebra ordinaria.

LEZIONE 5

Tempo di studio
40 minuti

5. PROPRIETA' DEGLI OPERATORI BOOLEANI

Le definizioni, presentate nella precedente lezione, godono di alcune proprietà che é necessario esaminare per poter procedere alla semplificazione di espres - sioni booleane.

5.1. Proprietà commutativa della somma booleana e del prodotto booleano.

$$X + Y = Y + X \quad (1)$$

$$XY = YX \quad (2)$$

Il risultato di una operazione + o di una operazione · non cambia mutando l'ordine degli operandi.

La verifica di questa proprietà, per es. la (1) può essere fatta nel seguente modo :

- si assegnano ad X ed ad Y i valori, 0, 1 in tutti i modi possibili . Si ottiene la tabella dei casi di un circuito OR a due ingressi :

	1°	2°	3°	4°
X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
X + Y	0	1	1	1
Y + X	0	1	1	1

fig. 5.1.1

Dalla tabella si vede che X + Y e Y + X valgono sempre 1 nei casi : 2°, 3° e 4°, e sempre 0 nel 1° caso anche se si muta l'ordine degli operandi X e Y.

5.2. Proprietà distributiva di ciascuna delle due operazioni booleane + e · rispetto all'altra.

$$X\,(Y + Z) \quad = \quad XY + XZ \qquad (1)$$

La verifica della (1) é fatta realizzando i circuiti che esprimono i due membri della equazione.

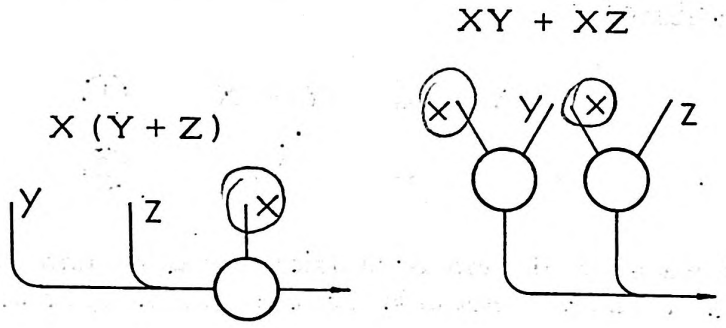


fig. 5.2.1

Per ognuno dei due valori (1 e 0) che i segnali X, Y e Z possono assumere, il valore del segnale di uscita é eguale nei due circuiti.

5.3. Proprietà delle costanti 0 e 1.

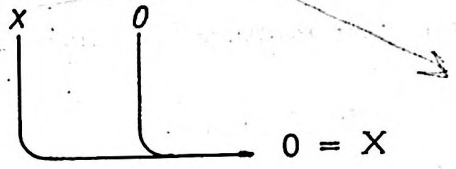
$$X + 0 = X \quad (1) \qquad X \cdot 1 = X \quad (3)$$

$$X + 1 = 1 \quad (2) \qquad X \cdot 0 = 0 \quad (4)$$

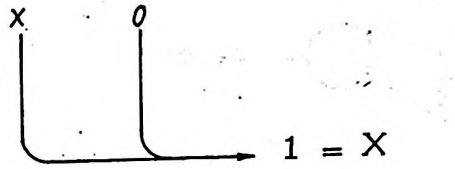
Tutte le proprietà, ① ÷ ④ , valgono per qualunque valore di X (1 o 0).

Ad esempio :

$X + 0 = 0$

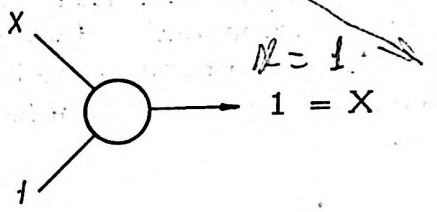


se $X = 0$ $\quad 0 + 0 = 0$

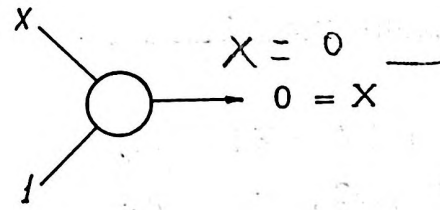


se $X = 1$ $\quad 1 + 0 = 1$

$X \cdot 1 = X$



se $X = 1$ $\quad 1 \cdot 1 = 1$



se $X = 0$ $\quad 0 \cdot 1 = 0$

5.4. Proprietà della complementazione.

$$X + \overline{X} = 1 \quad (1) \qquad X \cdot \overline{X} = 0 \quad (2)$$

$$\overline{\overline{X}} = X \quad (3)$$

La verifica della proprietà può essere fatta nel seguente modo :

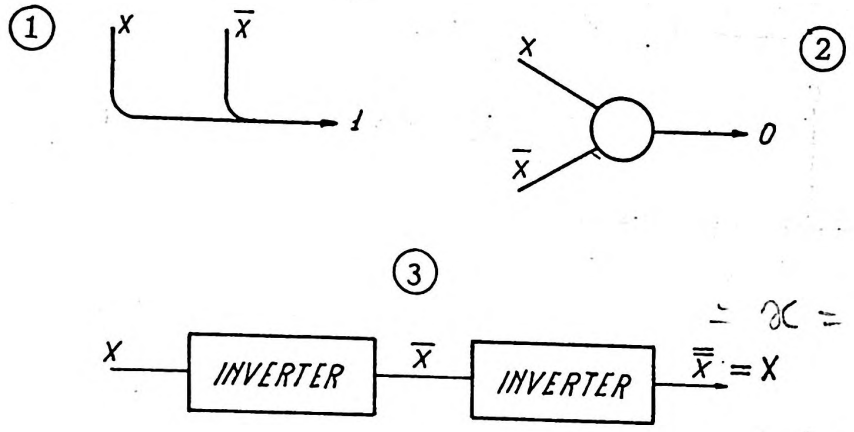


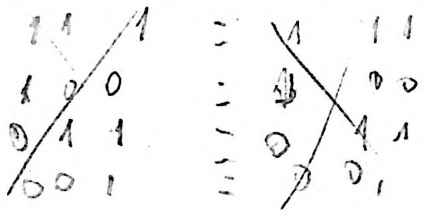
fig. 5.4.1

5.5. A questo punto, senza procedere ad ulteriori verifiche, ma sulla base soltanto di ragionamenti logici sulle proprietà 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, si possono dedurre altre importanti proprietà degli operatori booleani +, ·, $\overline{\ }$.

5.6. Proprietà associativa delle due operazioni + e ·

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) \quad (1)$$

$$(XY)\ Z = X\ (YZ) \quad (2)$$



5.7. Per ognuno dei due valori binari che X può assumere si hanno le seguenti proprietà :

$$X + X = X \quad (1) \qquad X \cdot X = X \quad (2)$$

Queste proprietà sono denominate :

"Leggi di assorbimento".

5.8. Regole di De Morgan

$$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} \quad (1)$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y} \quad (2)$$

?

Per valori di 1 e 0 -

e per i negat.

o segni barra

5.9. Prima di concludere questa lezione si esegue la verifica delle Regole di De Morgan per il tramite di una serie di domande.

ottenere $U = \overline{x \times y}$

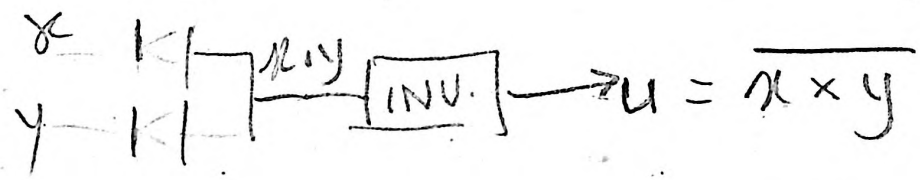
DOMANDE

Utilizzando dei circuiti : AND, OR e INVERTER, si disegni il circuito espresso dalle relazioni :

a) - $\overline{X \cdot Y} = U$

Partendo con i segni X e Y...

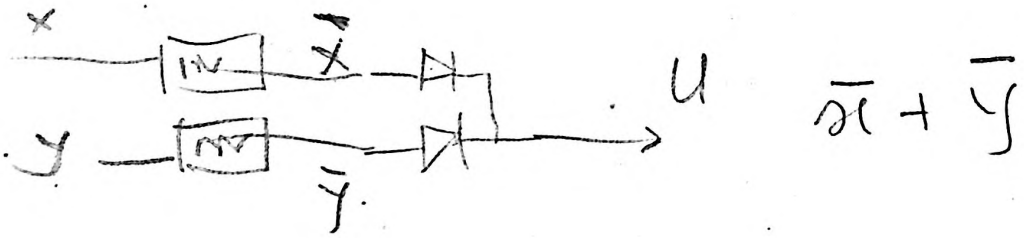
con



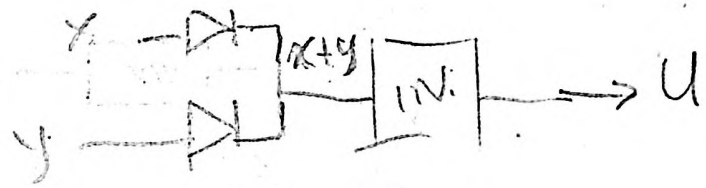
b) - $\overline{X} + \overline{Y} = U$

ottenere

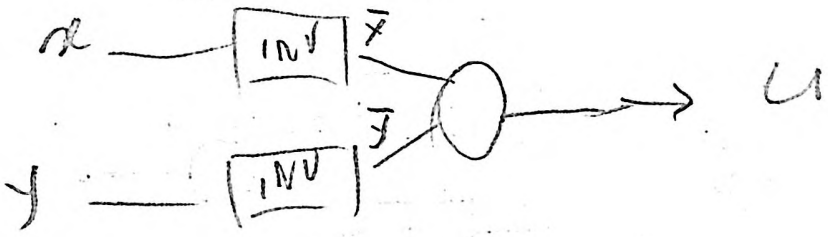
con



c) - $\overline{X + Y} = u$

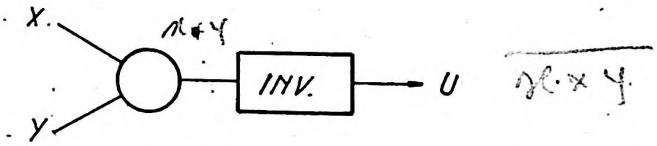


d) - $\overline{X} \cdot \overline{Y} = u$

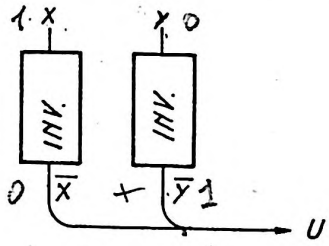


RISPOSTE

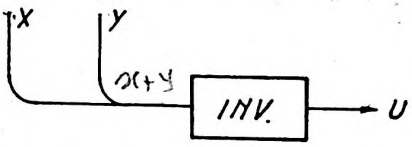
a) - $\overline{X \cdot Y} = U$



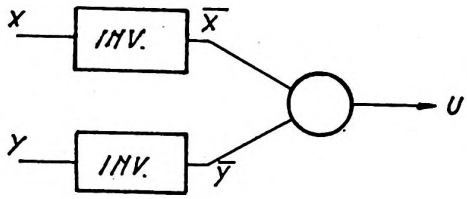
b) - $\overline{X} + \overline{Y} = U$



c) - $\overline{X + Y} = U$



d) - $\overline{X} \cdot \overline{Y} = U$



Si osservi che per una qualsiasi delle quattro combinazioni dei due valori che possono essere dati a X e Y (0 e 0, 0 e 1, 1 e 0, 1 e 1), il valore delle uscite di a) é eguale a quello di b), e l' uscita di c) é eguale a quella di d). Ciò dimostra la validità delle regole di De Morgan :

$$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Con i valori 1 e 0

Vere che corrisponde a verità

Caso A $x=1$ $y=0$ | Caso b. $x=0$ $y=0$ | Caso c. $x=0$ $y=1$ | A $x=1$ $y=1$

1 x 0 = 0 uv = 1 a

10 x 0 = 0 uv = 1 b

10 x 1 = 0 uv = 1 c

1 x 1 = 1 uv = 0 A

$\overline{x \cdot y} =$

LEZIONE 6

1 in + 0 un

0 + 1 = 1 a

0 in + 0 un

1 + 1 = 1 b

0 un + 1 un

1 + 0 = 1 c

1 un + 1 un

0 + 0 = 0 A

De: Morgan

$= \bar{x} + \bar{y}$

1 + 0 = 1 uv = 0 a

0 + 0 = 0 uv = 1 b

0 + 1 = 1 uv = 0 c

1 + 1 = 1 uv = 0 A

$\overline{x+y} =$

1 uv x 0 uv

0 x 1 = 0 a

0 uv x 0 uv =

1 x 1 = 1 b

0 uv x 1 uv

1 x 0 = 0 c

1 uv x 1 uv

0 x 0 = 0 A

Tempo di studio
ore 1 e 30 minuti

$\bar{x} \cdot \bar{y}$

6. METODI DI SEMPLIFICAZIONE DELLE FUNZIONI BINARIE

6.1. Nelle lezioni precedenti sono state esaminate le regole fondamentali delle operazioni aritmetiche binarie e di quelle logiche binarie (algebra di Boole). Si può ora, procedere allo studio delle espressioni booleane che esprimono le funzioni logiche dei circuiti degli elaboratori.

E' importante sottolineare la differenza concettuale che esiste fra le regole delle operazioni aritmetiche binarie e le regole dell'algebra di Boole. Le prime indicano il modo di operare nelle operazioni aritmetiche binarie, mentre le altre consentono sia di ricavare le funzioni per realizzare le prime, sia di esprimere la funzione di un qualsiasi circuito logico.

Si supponga di voler realizzare un circuito, costituito da AND e da OR, che permetta di "tradurre" un codice binario in un altro codice binario.

Ad esempio, si desidera "tradurre" i caratteri numerici di un codice binario chiamato " Audit" in un codice binario puro.

Codice Audit

CARATTERE	d	c	b	a
0	0	0	0	1
1	1	0	0	1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	1	1	0	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	0
7	0	1	0	1
8	0	0	1	1
9	0	0	1	0

Cod. binario puro

d	c	b	a
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1

fig. 6.1.1

E' necessario formare un insieme di circuiti che, per ogni combinazione binaria del codice Audit, fornisca in uscita la relativa configurazione binaria in codice binario puro.

Si limita l'esempio, per brevità di descrizione, alla sola realizzazione del bit "a" del codice binario puro.

Si può ragionare nel seguente modo.

Il bit "a" del codice binario puro, assume livello 1 in corrispondenza dei caratteri 1,3,5,7,9. Le configurazioni binarie in codice Audit di questi caratteri sono rispettivamente:

codice audit

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$, $\bar{a}\bar{b}cd$, $\bar{a}b\bar{c}d$, $a\bar{b}\bar{c}d$, $\bar{a}bcd$.

1 3 5 7 9

Si deve realizzare un circuito in grado di fornire un'uscita "alta" (bit "a" del codice binario a 1) quando almeno una delle 5 configurazioni del codice Audit é presente. Ciò é espresso dalla seguente relazione :

$$\text{bit a (binario puro)} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}bcd \quad (1)$$

alla quale corrisponde il seguente circuito ad AND ed OR.

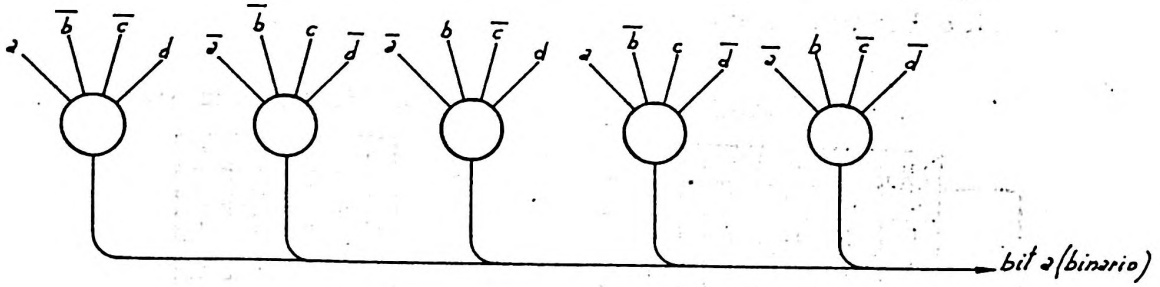


fig. 6.1.2

Il circuito così ottenuto risulta relativamente complesso. Si esamina l'espressione (1) per cercare di ridurre il numero di termini che compongono la stessa mantenendo inalterato il risultato.

Si può procedere alla semplificazione, della espressione, utilizzando le regole dell'algebra di Boole.

Infatti, raccogliendo a fattore comune in modo opportuno, si ottiene :

$$\text{bit a (bin.)} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{b}c\bar{d}\,(a + \bar{a}) + \bar{a}b\bar{c}\,(d + \bar{d})$$

$$\text{poiché} \quad \left.\begin{aligned} a + \bar{a} &= 1 \\ d + \bar{d} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(si veda il paragrafo 5.4.)}$$

la relazione finale risulta :

$$\text{bit a (binario)} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c} \text{ (Audit)} \quad (2)$$

e il circuito che la realizza é il seguente :

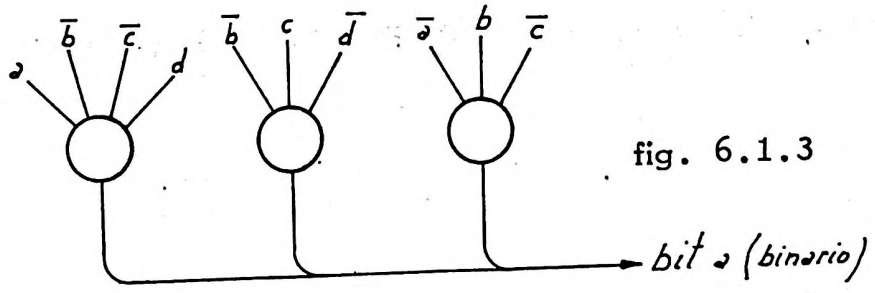


fig. 6.1.3

Come si può notare l'espressione (2), e il relativo circuito di fig. 6.1.3, sono più semplici della espressione (1) e del relativo circuito pur trattandosi della stessa funzione logica.

DOMANDE

Si semplifichino, se possibile, le seguenti espressioni :

a) - $\overline{(A + B)\,C}$ .... $\overline{A+B} + \bar{C} = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{C}$ ....

b) - $\overline{(\overline{A + B}) + (\overline{C + D})}$ .....

c) - $AB + ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}$ ..... $= A$

d) - $(A + 0)\,(B + C)$ .....

$A \cdot (B + C)$

RISPOSTE De Morgan

a) - $\overline{(A+B)\cdot C} = \overline{A+B} + \overline{C} = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{C}$

b) - $\overline{\overline{(A+B)} + \overline{(C+D)}} = \overline{\overline{(A+B)}}\cdot\overline{\overline{(C+D)}} =$

$= (A+B)\cdot(C+D)$

c) - $AB + ABC + AB\bar{C} + A\bar{B} = AB(1 + C + \bar{C}) + A\bar{B} =$

$= AB + A\bar{B} = A(B+\bar{B}) = A$

d) - $(A+0)(B+C) = A(B+C)$ perché $A+0 = A$

6.2. Nel paragrafo precedente si é esaminato il metodo algebrico di riduzione di una funzione che é utilizzato per la semplificazione delle espressioni booleane.

Esistono anche metodi grafici di semplificazione.

I vari metodi differiscono fra loro solo per il modo con cui le proprietà booleane vengono utilizzate ; comunque, tutti i metodi hanno lo scopo di eliminare termini "ridondanti".

Per ridondante si intende un termine la cui presenza, o assenza, non é determinante ai fini della funzione logica delle espressioni.

Si esamini il seguente esempio di metodo grafico di semplificazione, denominato :

METODO DELLE MAPPE

Se si hanno due variabili booleane, a e b, le 4 diverse combinazioni che si possono ottenere, si dispongono in una mappa nel seguente modo :

	a	$\bar{a}$
b	ab 1	$\bar{a}b$ 2
$\bar{b}$	$a\bar{b}$ 3	$\bar{a}\bar{b}$ 4

fig. 6.2.1

l'area 1 corrisponde alla combinazione ab
l'area 2 corrisponde alla combinazione $\bar{a}b$
l'area 3 corrisponde alla combinazione $a\bar{b}$
l'area 4 corrisponde alla combinazione $\bar{a}\bar{b}$

Le aree : 1 e 3 rappresentano la variabile a, -
2 e 4 rappresentano la variabile $\bar{a}$, -
1 e 2 rappresentano la variabile b,
3 e 4 rappresentano la variabile $\bar{b}$.

$AB + A\bar{b} = A$

Ad esempio, le aree 1 e 3 si possono indicare come $a\bar{b} + a\bar{b}$ ma anche come "a", infatti

$$ab + a\bar{b} = a\,(b + \bar{b}) = a\,(1) = a$$

La tabella dei casi in cui la espressione in esame é presente, detta tabella della verità, é ottenuta scrivendo un 1 nell'area che corrisponde alla combinazione delle variabili che la generano.

Ciò può essere messo in evidenza, anche nella relativa mappa, indicando con 1 le aree interessate :

	a	$\bar{a}$
b	1 (1)	(2)
$\bar{b}$	1 (3)	(4)

fig. 6.2.2

E' sottointeso che ad ogni 1 corrisponde un termine della funzione logica :

area 1 ⟶ ab

area 3 ⟶ $a\bar{b}$

Nell'esempio si nota che le due aree ADIACENTI contrassegnate con un 1 esprimono ognuna un termine in cui compare rispettivamente la variabile b (ab) e il suo completamento $\bar{b}$ ($a\bar{b}$).

Ciò permette di stabilire che la funzione considerata é riducibile alla sola variabile a in quanto:

$$ab + a\bar{b} = a\,(b + \bar{b}) = a$$

In modo analogo si procede per le aree :
1 e 2 ($\bar{a}b + ab = b$), 2 e 4 ($b\bar{a} + \bar{a}\bar{b} = \bar{a}$), 3 e 4 ($a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} = \bar{b}$).

Si consideri ora una mappa per tre variabili : a, b, c.

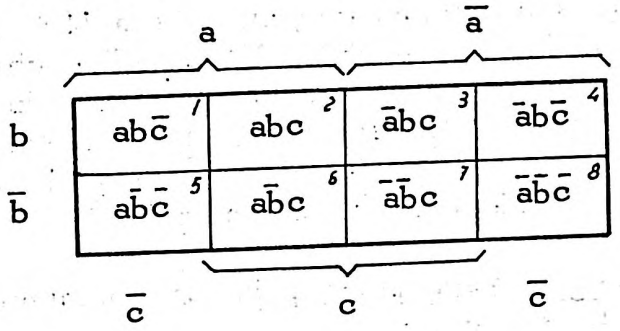


fig. 6.2.3

L'ordine con il quale sono disposte, attorno alla mappa, le tre variabili e i relativi complementi non é sempre quello utilizzato in fig. 6.2.3 .

Tale ordine deve comunque permettere di ottenere una diversa combinazione delle tre variabili per ognuna delle otto aree della mappa.

Si supponga di avere la funzione logica di un circuito espressa dalla seguente relazione :

$$f = ab\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c$$

e di doverla semplificare.

Si può procedere con il metodo algebrico ottenendo :

$$f = ab\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c = ab\bar{c} + \bar{a}c\,(b + \bar{b}) = ab\bar{c} + \bar{a}c$$

oppure con il metodo delle mappe.

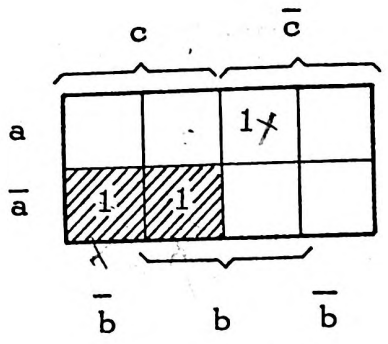


fig. 6.2.4

Le due aree tratteggiate sono adiacenti e fra loro complementari con riferimento alla variabile "b" : una zona, quella a sinistra corrisponde a "$\bar{b}$", quella a destra corrisponde a "b". Ciò significa che per le combinazioni delle variabili a cui corrispondono le due aree tratteggiate, la variabile b é ridondante e cioé non determinante per due dei tre termini che compongono la funzione logica del circuito.

Eliminando la variabile b e il suo complemento dalle due combinazioni :

$$\bar{a}bc \quad , \quad \bar{a}\bar{b}c$$

si ottiene la formula così ridotta :

$$f = \bar{a}c + \bar{a}c + ab\bar{c} = \bar{a}c + ab\bar{c}$$

Il termine $\bar{a}c$ é sufficiente per definire le due aree tratteggiate.

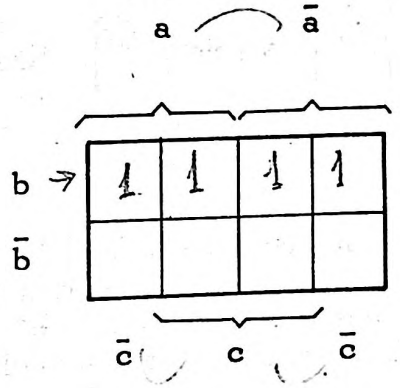
Si può inoltre notare che lo "1" che occupa la area corrispondente a "$ab\bar{c}$" indica che questa combinazione é un termine della funzione non ulteriormente riducibile in quanto non é adiacente a nessun'altra area contrassegnata con "1".

DOMANDE

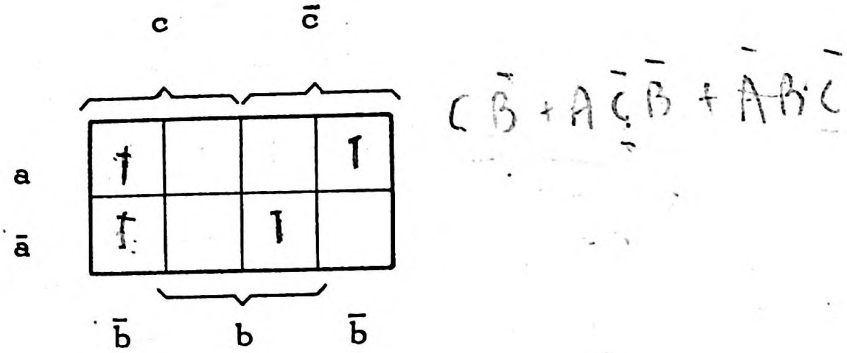
Si esegua la semplificazione delle seguenti espressioni, sia con il metodo algebrico, che con il metodo delle mappe :

a) - $f = ab\bar{c} + abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$

$AB + \bar{A}B = B$



b) - $f = a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}$



RISPOSTE

a) - $f = ab\bar{c} + abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$

$f = ab\,(\bar{c}+c) + \bar{a}b\,(c+\bar{c}) = ab + \bar{a}b$

$f = b\,(a+\bar{a}) = b$

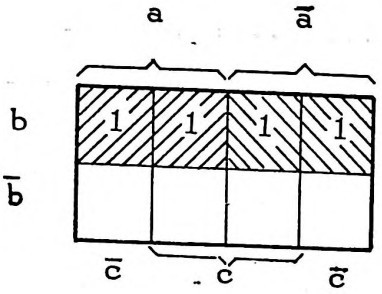


fig. 6.2.5

Dalla mappa si può notare che la funzione é composta da 4 termini in cui sono presenti le variabili a e c e i valori negati delle stesse $\bar{a}$ e $\bar{c}$, per cui, la funzione é riducibile alla sola variabile b che é sufficiente a determinare il risultato voluto.

b) - $f = a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$

$f = \bar{b}c\,(a+\bar{a}) + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$

$f = \bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$

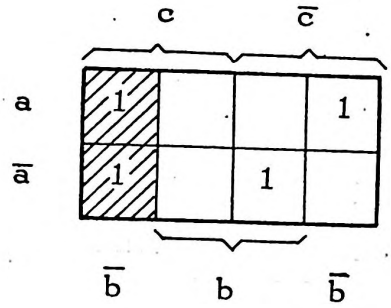


fig. 6.2.6

i due termini, che corrispondono alle due aree adiacenti, sono indicati con il tratteggio e riguardano la variabile "a" e il suo complemento che sono ridondanti.

Metodo di Quine

6.3. In tutti gli esempi di semplificazione con il metodo delle mappe, si può notare che :

- se esistono aree adiacenti della mappa contrassegnate con "1", le n variabili di un termine dell'espressione diventano n - x, dove x é il numero di coppie di aree adiacenti.

Si veda, per esempio, la mappa di fig. 6.2.4 l'espressione data é composta da tre termini di tre variabili, quella semplificata é composta da due termini, uno dei quali é però formato da due e non da tre variabili.

La semplificazione ottenuta con il metodo algebrico e quella ottenuta con il metodo delle mappe permettono di ottenere lo stesso risultato, ma il procedimento analitico é più lungo e più soggetto ad errori.

Il metodo delle mappe é di facile utilizzazione per un numero limitato di variabili, sino a 5 o 6.

Per un numero superiore di variabili sono usati altri metodi, ad esempio, quello di Quine.

Non si ritiene opportuno dare nel presente volume, una spiegazione del metodo di Quine o di altri metodi più complessi. Il lettore interessato può consultare uno dei testi citati nella bibliografia.

DOMANDE

a) - Che cosa é un metodo di semplificazione delle espressioni booleane ?

Metodo Regola per semplificare le espressioni (Booleane) logiche eliminando i termini ridondanti

b) - Quale vantaggio presentano le mappe rispetto al metodo di semplificazione algebrico, in una espressione con poche variabili ?

Servono a ricavare subito l'espressione il più semplice possibile riducendo le possibilità di errori

RISPOSTE

a) - E' un procedimento che permette di eliminare le variabili ridondanti di una espressione booleana.

b) - Per una funzione logica a poche variabili le mappe permettono di ricavare il valore semplificato della stessa, riducendo la possibilità di errori rispetto al metodo di semplificazione analitica.

LEZIONE 7

Tempo di studio
1 ora

7. FUNZIONI LOGICHE

7.1. Due variabili, A e B, possono essere associate per mezzo di particolari operatori logici.

Ad esempio, nella fig. 7.1.1, sono riportate sei diverse funzioni logiche.

fig. 7.1.1

Variabile		Funzione					
A	B	F1	F2	F3	F4	F5	F6
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Ogni funzione può essere rappresentata con una espressione booleana.

Esaminando il valore che la funzione F1 assume in corrispondenza di ogni combinazione delle due variabili si osserva che F1 assume valore 1 se almeno una delle due variabili ha valore 1.

Ciò corrisponde alla funzione di un circuito OR che é espresso dalla seguente relazione :

$$F1 = A + B$$

La funzione F4 assume il valore 1 quando almeno una delle variabili ha valore 0, ciò può essere espresso dalla seguente relazione :

$$F4 = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

Per semplificare l'espressione che rappresenta F4, si aggiunge un termine già presente nella stessa : $\bar{A}\bar{B}$.

Si ricordi che, per la legge di assorbimento (paragrafo 5.7.) sommando due termini eguali di una espressione booleana il valore stesso non muta.

Perciò si ha :

$$F4=\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}$$

raccogliendo si ottiene

$$F4 = \overline{A}(B + \overline{B}) + \overline{B}(A + \overline{A})$$

$$F4 = \overline{A} + \overline{B}$$

Per le regole di De Morgan (paragrafo 5.8.) si ha :

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$$

perciò

$$F4 = \overline{AB}$$

La relazione corrisponde a un circuito NAND che, come é stato descritto nel volume "Transistori-Teoria ed applicazioni" paragrafo 19.2, é composto da un AND seguito da un INVERTER.

Si sono così determinati i circuiti che realizzano le funzioni F1 e F4.

DOMANDE

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per F1 e F4 si ricavano i circuiti che realizzano le funzioni F2, F3, F5 e F6.

A questo scopo si risponda alle seguenti domande:

a) - La funzione F2 assume valore 1 soltanto se entrambe le variabili hanno contemporaneamente valore 1. Quale circuito a diodi ha questa funzione?

(A · B = AND
Funzione ..... circuito .....

b) - Con quale espressione booleana si rappresenta un AND a due ingressi (A e B) ?

A · B

c) - La funzione F3 assume livello 1 nei casi indicati dalla seguente relazione :

$$F3 = \bar{A}\bar{B}$$

Quale circuito é espresso dalla relazione che rappresenta F3 ?

$\bar{A}\bar{B} = \overline{A+B}$ = NOR

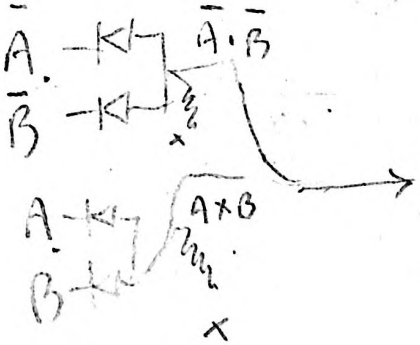
d) - Qual'é l'espressione booleana che rappresenta F5 = 1 ?

(Non AND? ma OR) $A\bar{B} + \bar{A}B$

e) - Quali valori debbono assumere le due variabili, A e B, per avere F6 = 1 ?

$F6 = \bar{A}\cdot\bar{B} + A\cdot B$ ..... $A = B$; $B = A$

f) - Si disegni il circuito che realizza la funzione F6 :



RISPOSTE

a) - Il circuito AND é in grado di fornire un valore 1 in uscita soltanto quando tutti i suoi ingressi sono a 1.

b) - L'AND é rappresentato con un'espressione booleana nella quale i termini (ingressi dell'AND) sono uniti dall'operatore (·).

Per la funzione F2 si ha :

$$F2 = AB$$

c) - Per le regole di De Morgan (par. 5.8.) si ha :

$$\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A+B}$$

Ciò corrisponde all'espressione booleana realizzata con un circuito NOR.

d) - $F5 = A\overline{B} + \overline{A}B$, da questa espressione risulta che la funzione F5 assume valore 1 soltanto nei casi in cui le due variabili hanno valore diverso.

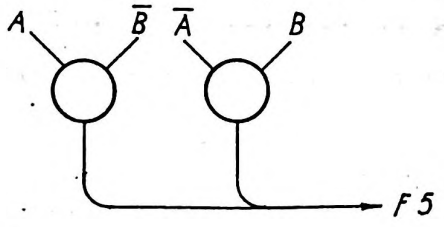
L'espressione di F5 si scrive anche nel seguente modo :

$$F5 = A \oplus B$$

L'operatore $\oplus$ é detto OR ESCLUSIVO.
Un circuito che permette di ottenere l'OR ESCLUSIVO é quello espresso dalla relazione

$$F5 = A\overline{B} + \overline{A}B$$

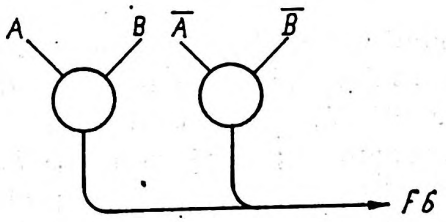
e può essere realizzato con circuiti AND e OR :



UN CIRCUITO OR ESCLUSIVO E' TALE DA GENERARE UN VALORE 1 SOLO SE LE VARIABILI DI INGRESSO HANNO VALORI DIVERSI.

e) - $F6=AB + \bar{A}\bar{B}$, cioé F6 assume valore 1 soltanto se le variabili hanno lo stesso valore (1 o 0).
Questa funzione é detta FUNZIONE DI IDENTITA'.

f) -



7.2. Nel precedente paragrafo si sono viste le seguenti funzioni :

$F1 = A + B$	cui corrisponde un	circuito	OR
$F2 = AB$	"	"	"	"	AND
$F3 = \bar{A}\bar{B} = \overline{A+B}$	"	"	"	"	NOR
$F4 = \overline{AB}$	"	"	"	"	NAND
$F5 = A\bar{B} + \bar{A}B$	"	"	"	"	OR ESCLUS.
$F6 = AB + \bar{A}\bar{B}$	"	"	"	"	IDENTITA'

E' ora opportuno esaminare la realizzazione di alcune delle funzioni sopra esposte con circuiti diversi da quelli sinora analizzati. Ad esempio : la funzione F2 = AB rappresenta un circuito AND che é sempre stato rappresentato sia nel volume "Transistori" che nel presente testo, con il seguente simbolo :

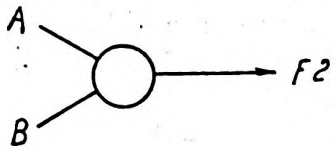


fig. 7.2.1

al quale si é fatto corrispondere il seguente circuito :

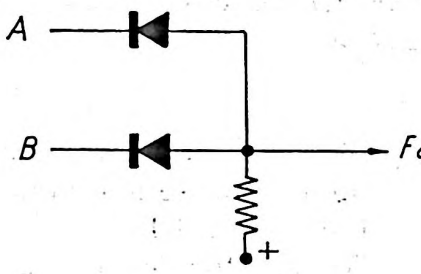


fig. 7.2.2

Un circuito AND può essere realizzato in modo diverso, utilizzando due flip-flop del tipo studiato nella lezione N° 21, del volume " Transistori, Teoria ed applicazioni "; cioé con flip-flop che possono essere comandati soltanto con segnali positivi. Nel disegno di fig. 7.2.3 i due ingressi dell'AND sono rappresentati dagli ingressi set dei due flip-flop.

Si considera come uscita dell'AND, l'uscita "diritta" del flip-flop B. L'ingresso in maschera reset dello stesso, é validato dall'impulso m. In questo caso l'AND non é realizzato utilizzando direttamente la presenza contemporanea dei segnali, ma utilizzando la staticizzazione degli stessi nei due flip-flop e considerando valido il valore d'uscita dall'istante in cui il segnale temporizzatore m assume il livello 1.

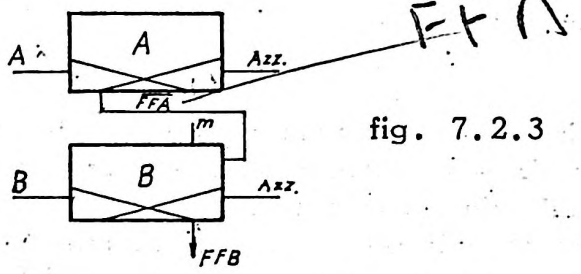


fig. 7.2.3

Dal diagramma di fig. 7.2.4 risulta evidente che, dalla presenza del segnale temporizzatore m, l'uscita del flip-flop B può essere a livello 1 soltanto se :

FFA (uscita diritta del flip-flop A) e

FFB (" " " " " B) hanno assunto il livello 1 prima della presenza del segnale m.

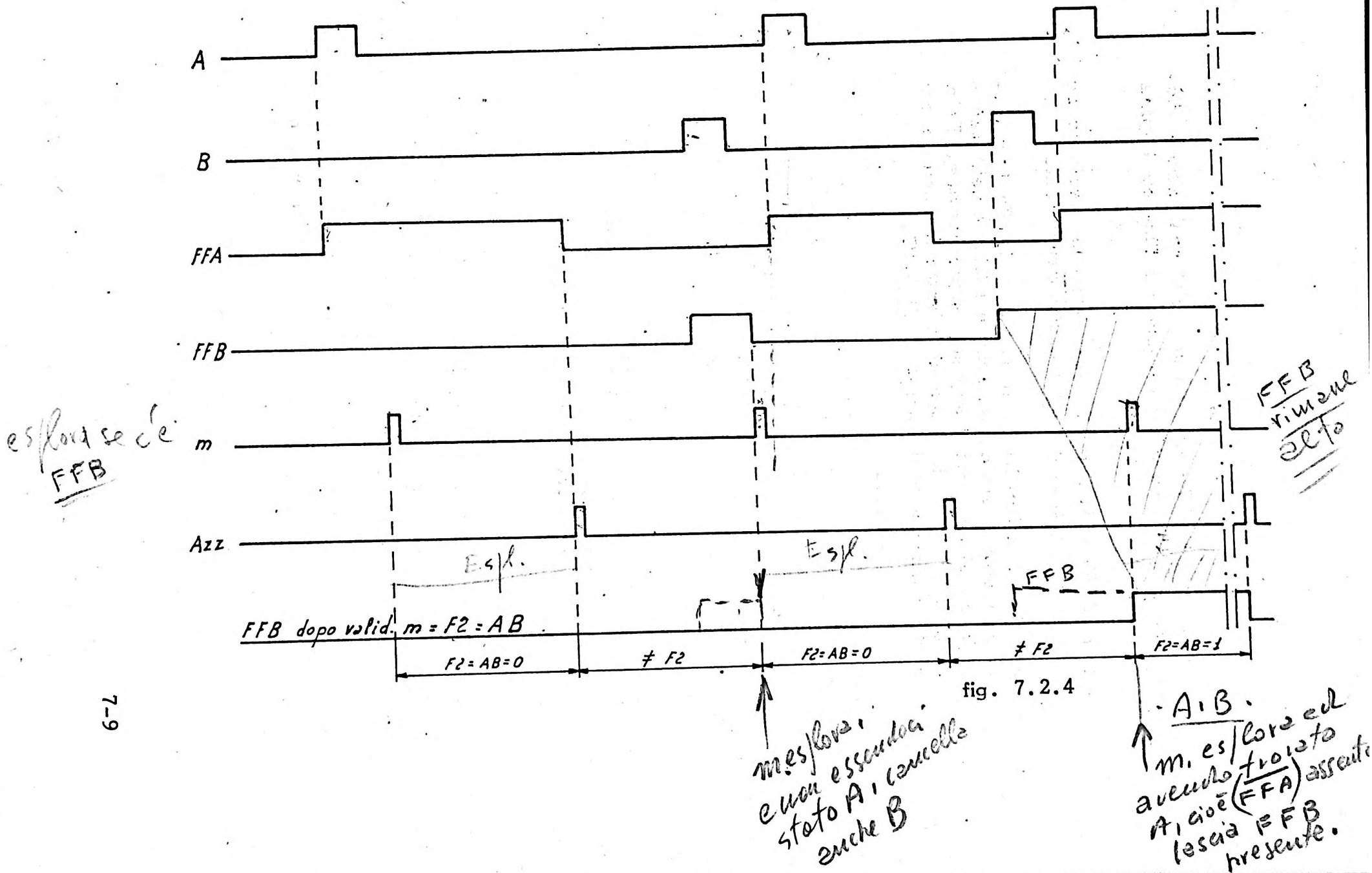

A
B
FFA
FFB
m
Azz
Esp.
Esp.
FFB
FFB dopo valid. m = F2 = AB
F2 = AB = 0
≠ F2
F2 = AB = 0
≠ F2
F2 = AB = 1
esplora se c'è FFB
FFB rimane alto
mesplora, e non essendoci stato A, cancella anche B
A . B .
m. esplora ed avendo trovato A, cioè (FFA) asserito lascia FFB presente.

fig. 7.2.4

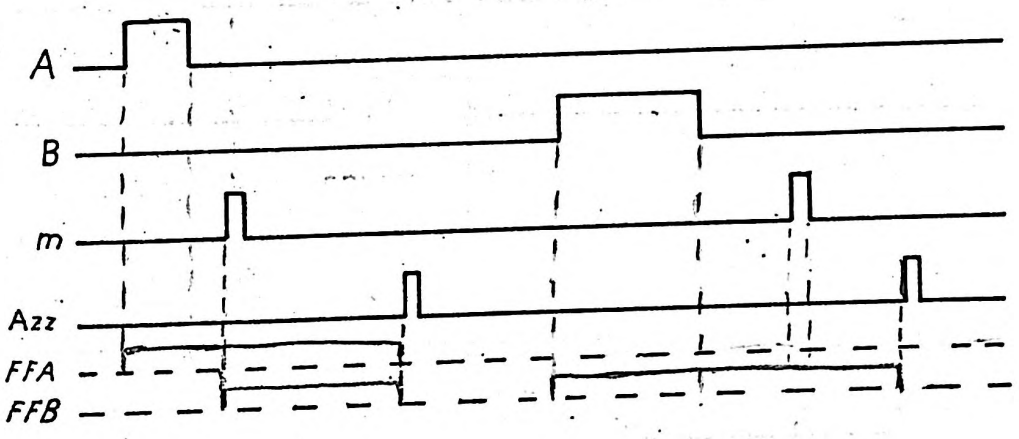
Si noti la differenza fra un AND realizzato a diodi (fig. 7.2.2) e un AND realizzato a flip-flop (figura 7.2.3);

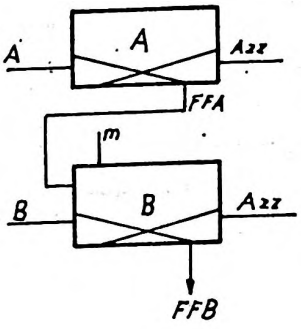
- con l'AND a diodi si ha uscita a livello 1 soltanto se i segnali di ingresso sono contemporaneamente a 1

- con l'AND a flip-flop si ha l'uscita a livello 1 soltanto se i segnali staticizzati sono a livello 1 nell'istante in cui si presenta il segnale temporizzatore. Tale segnale ha anche lo scopo di indicare il momento dal quale ~~è disponibile~~ si comincia a utilizzare.... il risultato dell' AND.

DOMANDE

a) - Con riferimento al circuito sottoriportato, si completi il seguente diagramma :





OR

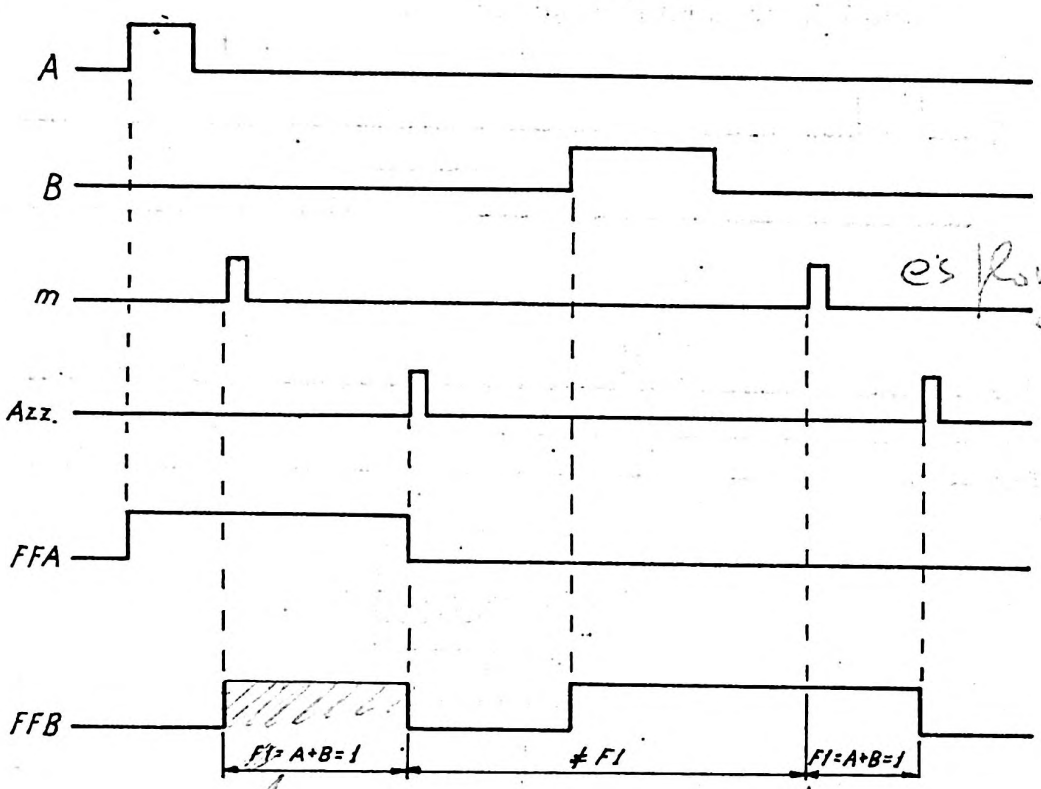
$U = B + A \cdot m$

b) - Quale funzione logica, fra le sei riportate in fig. 7.1.1, é realizzata dall'uscita del flip-flop B nell'intervallo di tempo compreso fra i segnali m e AZZ ?

F1. = OR

RISPOSTE

a) -



b) - L'uscita del flip-flop B (FFB) assume livello 1 se almeno uno dei due segnali di ingresso, A e B é a livello 1. Ciò equivale alla funzione logica di un OR la cui espressione booleana é la seguente:

$$FFB = A + B$$

Essa corrisponde alla F1 della fig. 7.1.1.

LEZIONE 8

Tempo di studio
2 ore

8. STUDIO DI UN ADDIZIONATORE-SOTTRATTORE BINARIO

8.1. Con le nozioni sin quì acquisite si procede alla realizzazione del circuito di un Addizionatore-Sottratto - re binario.

Si supponga di dover addizionare due numeri binari costituiti da quattro bit ciascuno.

Combinando i valori, 1 o 0, che ogni bit del primo numero può assumere, con i valori che può assumere il corrispondente bit del secondo numero, si ottengono quattro diverse combinazioni.

Chiamando bit x un generico bit del primo numero e bit y il corrispondente bit del secondo numero si ha, in relazione ai valori 1 o 0 che i rispettivi bit possono assumere, la seguente tabella :

N° combin.	4	3	2	1
bit x	0	0	1	1
bit y	1	0	1	0

fig. 8.1.1

Dalle combinazioni sopraesposte, si nota che nel caso di addizione, qualora $x = 1$ e $y = 1$, per le regole della addizione binaria ricavate nel paragrafo 2.1 si ha :

$$x + y = 1 + 1 = 0 + \text{riporto}$$

In questo caso, il riporto deve essere trasmesso al peso binario superiore, cioé deve essere considerato nel circuito che esegue l'addizione dei due bit di peso immediatamente superiore a quelli considerati.

Generalizzando, si può concludere che nel determinare un circuito in grado di realizzare l'addizione di due numeri binari, bit per bit, si deve considerare anche la eventuale presenza del riporto che proviene dal peso binario immediatamente inferiore.

Nello studio di un circuito per la addizione di due bit é quindi necessario considerare tre variabili :

x = bit del primo numero

y = corrispondente bit del secondo numero

r = riporto dal peso binario inferiore

Con tre variabili si ottengono, relativamente ai valori che esse possono assumere, 8 diverse combinazioni riportate nella seguente tabella :

N° combin.	8	7	6	5	4	3	2	1
bit x	0	0	0	0	1	1	1	1
bit y	1	1	0	0	1	1	0	0
riporto	1	0	1	0	1	0	1	0

fig. 8.1.2

Si può ora esaminare per ognuna delle otto combinazioni i casi nei quali il risultato dell'addizione delle tre variabili assume valore 1 oppure valore 0.

Si ottiene la seguente tabella, detta "tabella della verità " :

N° combin.	8	7	6	5	4	3	2	1
bit x	0	0	0	0	1	1	1	1
bit y	1	1	0	0	1	1	0	0
r	1	0	1	0	1	0	1	0
A	0	1	1	0	1	0	0	1
Ra	1	0	0	0	1	1	1	0

fig. 8.1.3

A = risultato a + b + r

r = riporto proveniente dal circuito dei bit di valore inferiore

Ra = riporto trasmesso al circuito dei bit di valore superiore

Nell'eseguire la addizione, a seconda dei valori che le variabili assumono, si può formare un riporto in conseguenza della addizione stessa.

Questo riporto, che si denomina Ra, deve essere trasmesso al circuito che esegue l'addizione dei due bit di valore immediatamente superiore. In questo circuito, il riporto deve essere interpretato come r, cioé come riporto proveniente dal bit di valore immediatamente inferiore.

Le espressioni logiche che si desumono dalla tabella di fig. 8.1.3, sono quindi due :

- una relativa alla determinazione del circuito per la addizione
- una relativa al circuito dei riporti da trasmettere all'addizionatore del peso superiore.

L'espressione logica che esprime i casi nei quali il risultato dell'addizione assume valore 1 é costituita dai termini delle combinazioni N° 7, 6, 4, 1.

Addizione $A = \bar{x}yr + x\bar{y}r + xy\bar{r} + x\bar{y}\bar{r}$ (1)

Per i riporti Ra l'espressione logica é la seguente :

Riporto Addizione $Ra = \bar{x}yr + xyr + xy\bar{r} + x\bar{y}r$ (2)

8.2. In modo analogo a quanto fatto per l'addizione di due bit, si possono ricavare le espressioni logiche per la sottrazione e per i riporti sottrattivi da inviare al circuito di calcolo dei pesi superiori.

N° combin.	8	7	6	5	4	3	2	1
x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	1	1	0	0	1	1	0	0
r	1	0	1	0	1	0	1	0
Risultato S →	0	1	1	0	1	0	0	1
Rs	1	1	1	0	1	0	0	0

fig. 8.2.1

S = risultato sottrazione

Rs = riporto verso bit superiore

$S = \bar{x}y\bar{r} + \bar{x}\bar{y}r + xyr + x\bar{y}\bar{r}$ (3)

$Rs = \bar{x}yr + \bar{x}y\bar{r} + \bar{x}\bar{y}r + xyr$ (4)

Si osservi che l'espressione logica della addizione (1) é eguale a quella della sottrazione (3) :

$$A^{addizione} = S^{sottrazione} = AS = \bar{x}y\bar{r} + \bar{x}\bar{y}r + xyr + x\bar{y}\bar{r} \qquad (5)$$

Tale espressione é semplificabile, infatti :

$$AS = \bar{x}(y\bar{r} + \bar{y}r) + xyr + x\,(\overline{y + r})$$

e aggiungendo al primo termine i valori $y\bar{y}=0$ e $r\bar{r}=0$, l'espressione non cambia di valore e si ha :

$$AS = \bar{x}(y\bar{r} + \bar{y}r + y\bar{y} + r\bar{r}) + xyr + x\,(\overline{y+r})$$

$$AS = \bar{x}\left[y\,(\bar{y}+\bar{r}) + r\,(\bar{y}+\bar{r})\right] + xyr + x\,(\overline{y+r})$$

$$AS = \bar{x}\left[(\bar{y}+\bar{r}) \cdot (y+r)\right] + xyr + x\,(\overline{y+r})$$

$$AS = \bar{x}\,(\overline{yr}) \cdot (y+r) + xyr + x\,(\overline{y+r}) \qquad (6)$$

L'espressione così ridotta può essere realizzata mediante il semplice circuito riportato nella pagina seguente (fig. 8.2.2).

$$AS = \bar{x}\,(\overline{yr})\cdot(y+r) + xyr + x\,(\overline{y+r})$$

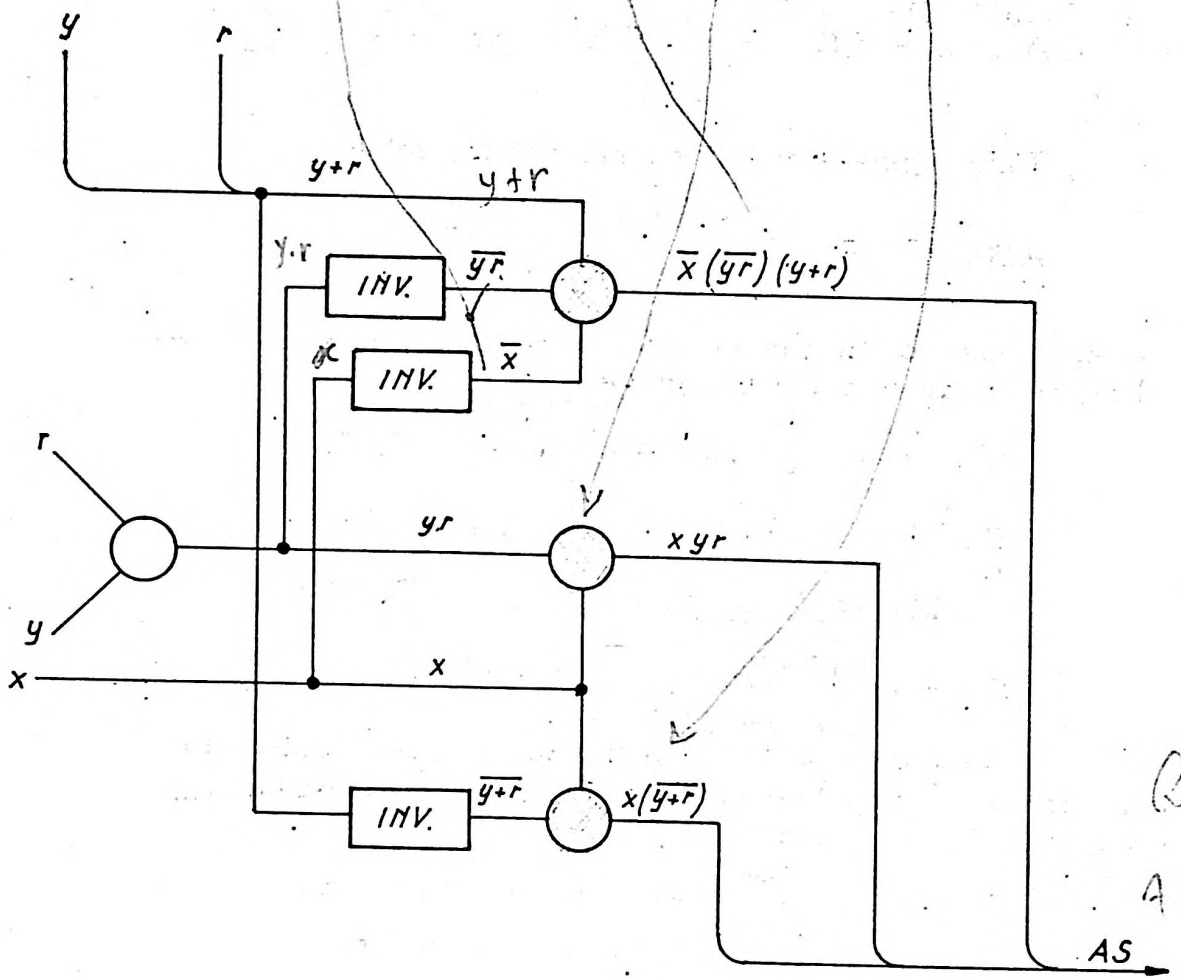


fig. 8.2.2

Il circuito realizzato riguarda sia l'addizione che la sottrazione di due bit corrispondenti che appartengono ai due numeri. Per addizionare tutti i bit che compongono due numeri binari, sono necessari tanti circuiti quanti sono i bit.

L'Addizionatore-Sottrattore di fig. 8.2.2 non é ancora completo, in quanto manca il circuito dei riporti che esso genera e che deve trasmettere al peso binario superiore (Ra o Rs).

Si riprendono le formule dei riporti Ra (2) e Rs (4) e si procede alla loro semplificazione.

$$Ra = \bar{x}yr + xyr + xy\bar{r} + x\bar{y}r$$
$$Ra = yr\,(\bar{x} + x) + x\,(y\bar{r} + \bar{y}r)$$
$$Ra = yr + x\,(y\bar{r} + \bar{y}r) \qquad (7)$$

$$Rs = \bar{x}yr + \bar{x}y\bar{r} + \bar{x}\bar{y}r + xyr \qquad (5)$$
$$Rs = yr + (x + \bar{x}) + \bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r)$$
$$Rs = yr + \bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r) \qquad (8)$$

Se si osservano le due formule semplificate (7) e (8) si nota che differiscono soltanto in un fattore del secondo termine :

- per Ra si ha x
- per Rs si ha $\bar{x}$

Si può scrivere una relazione unica e generale dei riporti. In tale relazione però deve essere presente una condizione che permette di distinguere i riporti dovuti alle operazioni di addizione da quelli dovuti alle operazioni di sottrazione.

Ciò può essere espresso con :

$$R = Ra \cdot A + Rs \cdot S \qquad (9)$$

dove A é il segnale che condiziona i riporti in caso di addizione
e S e il segnale che condiziona i riporti in caso di sottrazione.

cioé si ha riporto R se esiste Ra in presenza di A, oppure si ha riporto se esiste Rs in presenza di S.

La condizione A deve essere il complemento di S in quanto non si esegue la addizione contemporaneamente alla sottrazione, per cui si dovrà avere :

$$\text{Se } A = 1 \rightarrow S = 0$$

$$\text{Se } A = 0 \rightarrow S = 1$$

Sostituendo nella (9) il termine Ra con la (7) e il Rs con la (8), si ottiene :

$$R = [yr + x\,(y\bar{r} + \bar{y}r)]\,A + [yr + \bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r)]\,S$$

$$R = Ax\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + S\bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + yr\,(A + S)$$

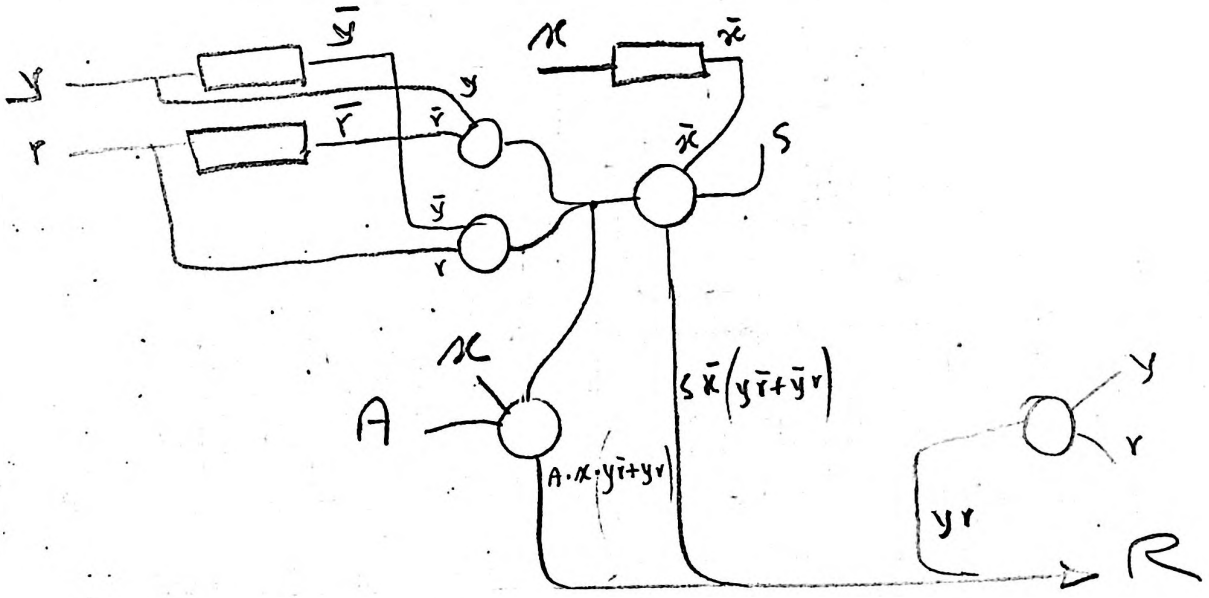
si ricordi che $A = \bar{S}$ per cui $A + S = 1 + 0 = 1$

$$R = Ax\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + S\bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + yr \qquad (10)$$

$$R = A x\left(y\bar{r} + \bar{y}r\right) + S\bar{x}\left(y\bar{r} + \bar{y}r\right) + yr$$

DOMANDE

a) - Si realizzi il circuito che esprime la formula con circuiti : AND, OR e INVERTER. (10)



b) - Se si debbono sommare i numeri binari composti da quattro bit quanti circuiti eguali a quelli di fig. 8.2 2 sono necessari ?

.....

.....

4 + 1 ?

tenendo presente che il circuit. f. 8.2.2 è solo per i n. bit. di ogni posiz bit..

RISPOSTE

$R = A\,x\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + S\,\bar{x}\,(y\bar{r} + \bar{y}r) + y\,r$

a)

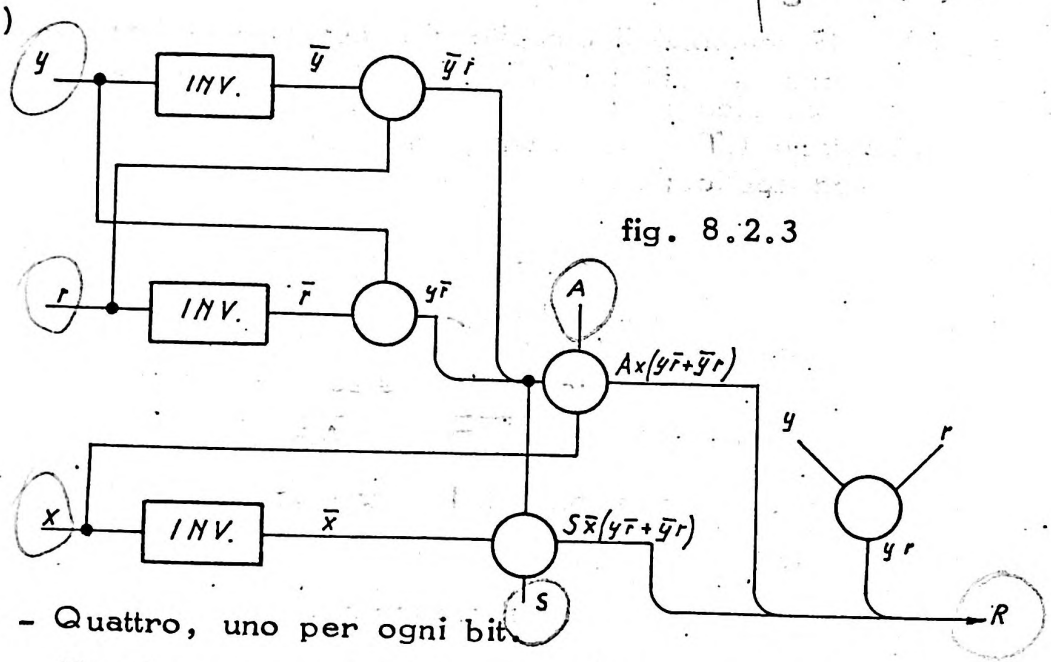
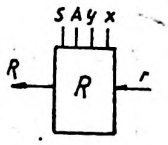


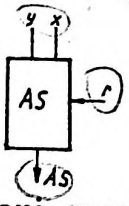
fig. 8.2.3

8-2 → b) - Quattro, uno per ogni bit.

Se si rappresentano in modo simbolico i circuiti dei riporti con il seguente simbolo :

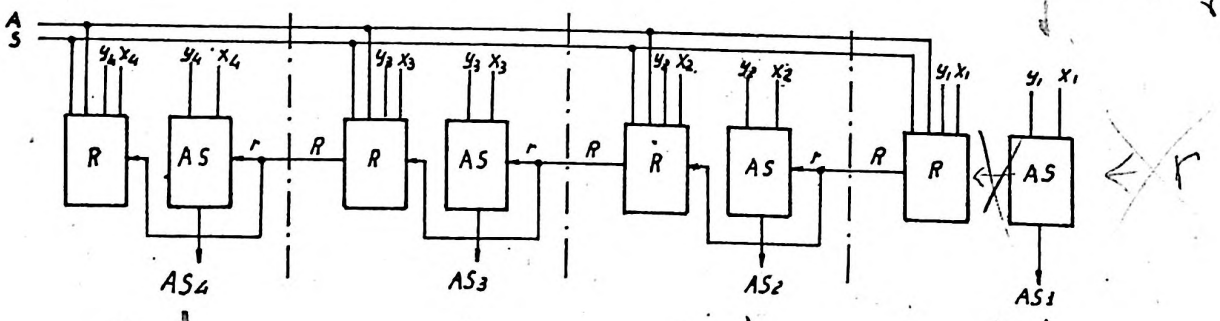


e i circuiti dell'addizionatore-sottrattore con il simbolo :



per la somma dei numeri composti da quattro bit, si ottiene il seguente schema di principio :

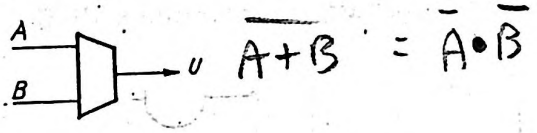
posizione 1 bit uscente riceve riporto



4° bit 3° bit 2° bit 1° bit

8.3. La realizzazione pratica delle due formule (6) e (10), cioé del circuito addizionatore-sottrattore di due bit, può essere effettuata anche con circuiti NOR.

Si ricorda il simbolo del circuito NOR, dello standard LTR 300 studiato nel volume "Transistori, teoria ed applicazioni "



e l'espressione logica che lo stesso realizza

$$U = \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$

La realizzazione della espressione

$$AS = \bar{x}\,(\overline{yr})(y + r) + xyr + x\,(\overline{y + r})$$

con circuiti NOR, é la seguente :

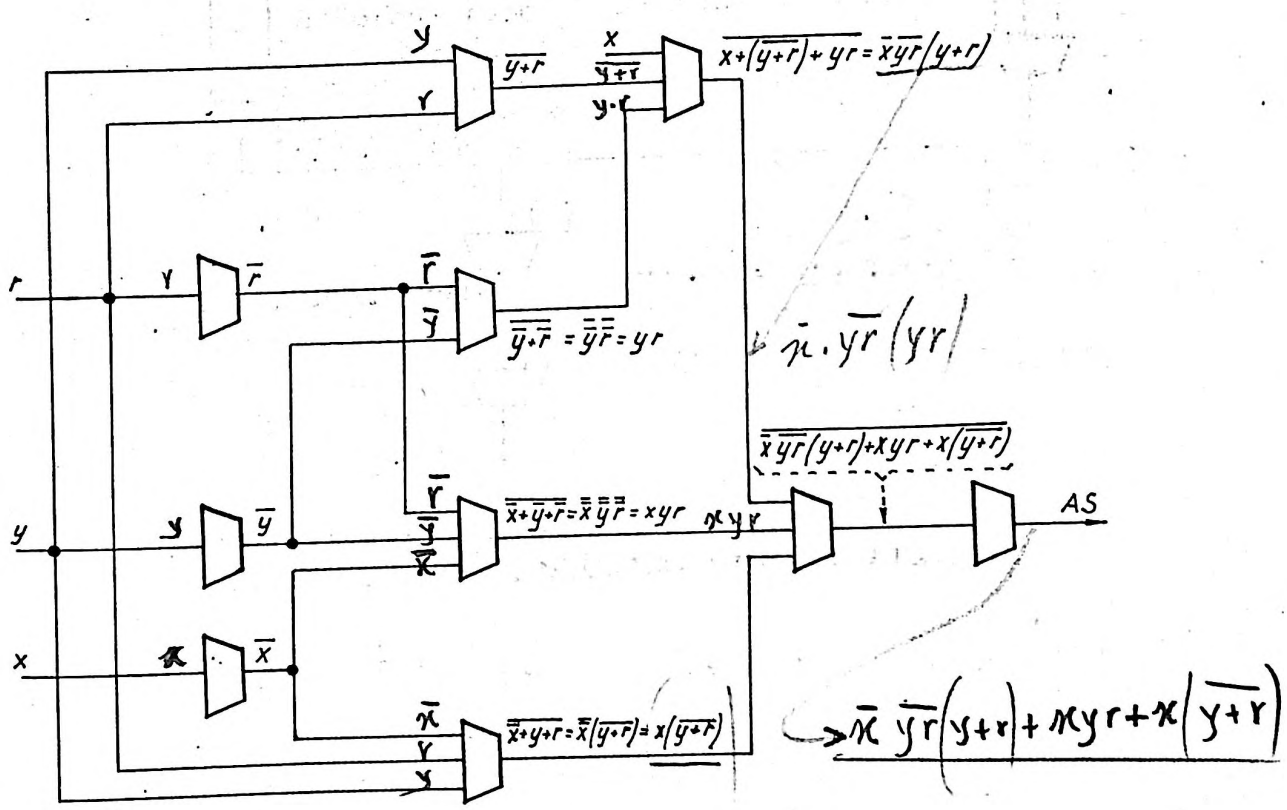


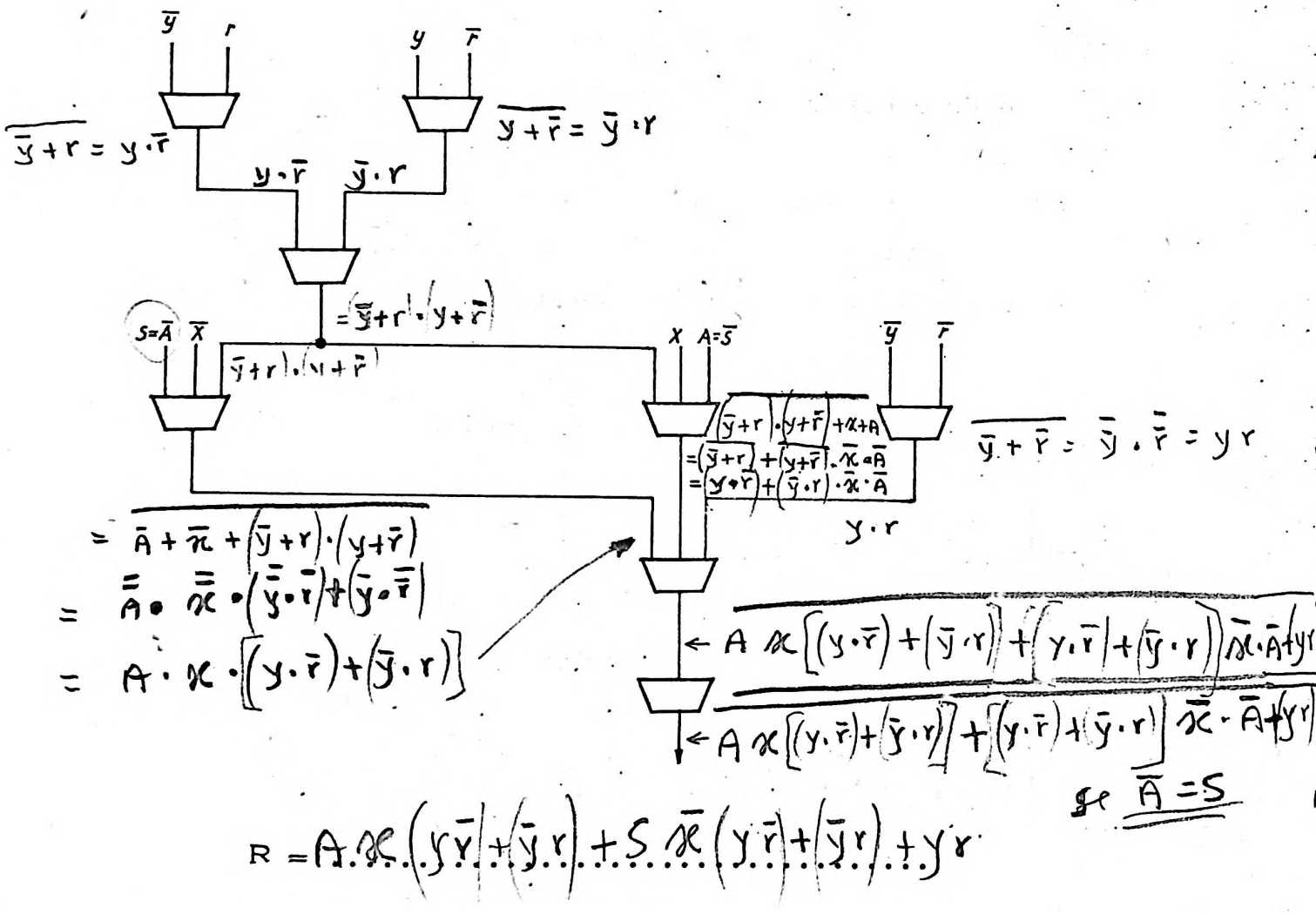
fig. 8.3.1

DOMANDE

a) - Il circuito di fig. 8.2.3 esprime la formula :

$$R = Ax(y\bar{r} + \bar{y}r) + S\bar{x}(y\bar{r} + \bar{y}r) + yr$$

Si indichi all'uscita di ogni NOR, l'espressione che rappresenta il segnale in uscita come é stato indicato nel circuito di fig. 8.3.1.



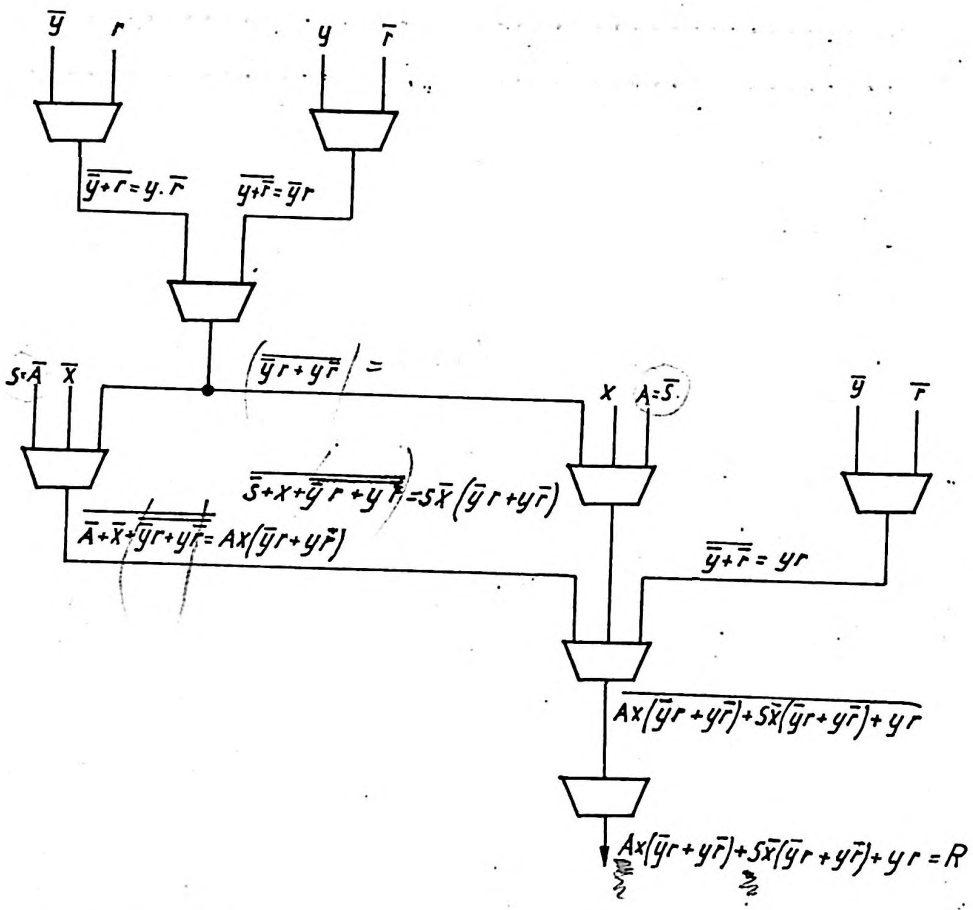
b) - Analizzando lo schema a blocchi della risposta 8.2. b) si descriva perché il primo stadio AS (AS_1) non ha l'ingresso dei riporti e l'ultimo stadio R di AS_4 non trasmette i riporti.

1: perché il bit sulle unità non riceverà riporto

2: la sequenza dell'addizionatore deve finire una posizione prima del suo limite almeno per uno dei due termini elementi. si vorrebbe un'altra posizione solo per il riporto —

RISPOSTE

a) -



b) - Il primo stadio (AS_1) non ha nessun altro stadio alla sua destra e cioé relativo ad un eventuale bit di valore inferiore. Infatti AS_1 é il circuito del bit a (2^0 1).
Il riporto generato dall'ultimo stadio (circuito R di AS_4) non é utilizzato perché, nell'esempio, si sono considerati dei numeri di 4 bit.

RIEPILOGO

Tempo di studio
1 ora

1. IL SISTEMA DI NUMERAZIONE DECIMALE E' :

- un sistema posizionale. (23)
- un sistema nel quale la posizione occupata dalle cifre in un numero, non ha alcuna importanza .(7)
- é un sistema che utilizza un numero variabile di simboli. (60)

2. RICORDANDO CHE UN BIT A LIVELLO 1 RAPPRESENTA UN PESO BINARIO, AD ESEMPIO 2^2, SOTTRAENDO DUE PESI BINARI DI EGUALE VALORE SI OTTIENE :

- $2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$. (53)
- $2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$ con un riporto verso 2^3. (55)

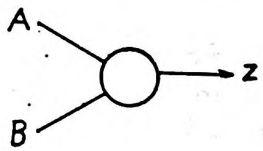
3. CHE COSA SI OTTIENE SOTTRAENDO 0 - 1 ?

- 1 con un riporto da sottrarre al bit di valore immediatamente superiore. (37)
- 1 senza riporto. (15)

4. LA RISPOSTA E' ESATTA.
SI RISPONDA NUOVAMENTE ALLA DOMANDA 23.

5. SI VEDA LA LEZIONE 8.

6. CON QUALE ESPRESSIONE LOGICA SI RAPPRESENTA IL SEGUENTE CIRCUITO ?



- Z = A+B. (44)
- Z = AB. (66)

7. QUALE VALORE ASSUME LA CIFRA 4 NEI DUE NUMERI DECIMALI 114 , 411?

- 4 unità nel numero 114, 4 centinaia nel numero 411. (52)
- eguale valore. (39)

8. UN 1 INDICATO IN UN'AREA DI UNA MAPPA SIGNIFICA CHE :

- l'espressione logica da semplificare ha sempre, per risultato, il valore 1. (59)
- nella espressione logica in esame é presente il termine corrispondente all'area stessa. (72)

9. SI DEFINISCE CARATTERE DI UN CODICE BINARIO :

- la cifra che in un numero binario rappresenta un peso binario e che può assumere valore 1 o valore 0. (38)
- un sistema di rappresentazione binaria di una cifra. (14)
- una qualsiasi combinazione (che ad esso appartiene.) Ad ogni combinazione binaria (carattere) si fà corrispondere un simbolo. (20)

10. SI VEDA LA LEZIONE 7.

11. CHE COSA RAPPRESENTANO LE CIFRE 1 e 0 CHE FORMANO, AD ESEMPIO, IL NUMERO BINARIO 010 ?

- il simbolo 1 indica la presenza del peso binario corrispondente alla posizione che occupa, nell'esempio, il peso $2^1 = 2$.
  In modo analogo lo zero ne indica l'assenza del peso corrispondente. (75)
- gli esponenti delle potenze in base due. (60)

12. LA RISPOSTA E' ESATTA, INFATTI NEL SISTEMA DI NUMERAZIONE ROMANA UNA CIFRA HA SEMPRE LO STESSO VALORE IN QUALSIASI POSIZIONE SI TROVI NEL NUMERO. NEL SISTEMA DI NUMERAZIONE DECIMALE, CHE E' UN SISTEMA POSIZIONALE, LA CIFRA ASSUME UN VALORE DIVERSO A SECONDA DELLA POSIZIONE CHE OCCUPA. (23)

13. QUALE DELLE SEGUENTI SEMPLIFICAZIONI CORRISPONDE ALLA ESPRESSIONE :

$$\overline{(\overline{A+B})\,(C+\overline{D})}+CD \;?$$

- $A+B+D$. (25)
- $A+B\,\overline{C}D+CD$. (47)
- $A\overline{C}+B\overline{C}+AD+BD+CD$. (17)

14. UN CARATTERE IN UN CODICE SI IDENTIFICA:

- soltanto con cifre. (18)
- con cifre, lettere e segni convenzionali. (9)

15. LE REGOLE DELLA SOTTRAZIONE BINARIA DI DUE BIT SONO LE SEGUENTI :

- $1-0=1$, $1-1=0$, $0-0=0$, $0-1=1$ con riporto. (26)
- $0-0=0$, $1-1=0$ con un riporto, $0-1=1$ con un riporto, $1-0=1$. (2)
- $0-1=0$, $0-0=0$, $1-0=1$, $1-1=0$. (32)

16. E' ESATTA LA SEGUENTE REGOLA PER L'ADDIZIONE DI DUE BIT

$$1+1=0 \;?$$

- Si. (64)
- No. (21)

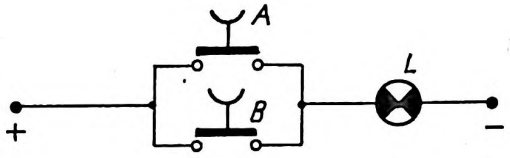
+ R. ✓

17. QUALE DELLE SEGUENTI EQUAZIONI E' ESATTA ?

- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$. (33)
- $\overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}$. (70)

18. SI VEDA LA LEZIONE 3.

19. CON QUALE ESPRESSIONE LOGICA PUO' ESSERE RAPPRESENTATO IL SEGUENTE CIRCUITO ?



- L = AB. (61)
- L = A+B. (54)

3-10

20. A QUALE CARATTERE DEL CODICE HOLLERITH CORRISPONDE LA SEGUENTE CONFIGURAZIONE BINARIA :

G E C
01010100 ?

- D. (31)
- 5. (28)
- a nessun simbolo. (18)

21. SOMMARE I DUE NUMERI BINARI 001 + 001 SIGNIFICA SOMMARE $2^0 + 2^0$ ED OTTENERE PER RISULTATO :

Premesse che
- $2^0 = 1$ quindi $2^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2 = 2^1$
cioé presenza di 2^1 e assenza di 2^0. (67)
- $2^0 = 1$ quindi $2^0 + 2^0 = 2^0$. (55)

22. LA RISPOSTA E' ESATTA, MA CON LA STESSA ESPRESSIONE LOGICA SI PUO' RAPPRESENTARE ANCHE IL CIRCUITO AND ED OR RIPORTATO NELLA PRIMA RISPOSTA DELLA STESSA DOMANDA 42. (13)

23. SI DEFINISCE BIT :

- il valore 1 che può assumere un peso binario di un numero binario. (11)
- la cifra che in un numero binario rappresenta un peso binario e che può assumere valore 1 o valore 0. (34)
- il simbolo che si usa per esprimere un numero binario. (29)

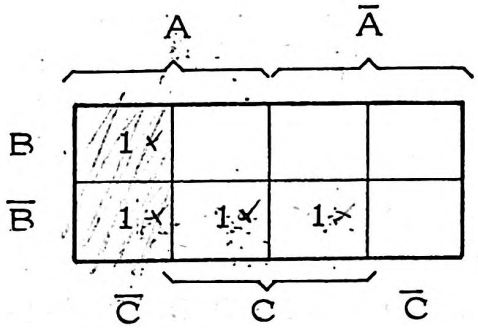
24. QUANTE SONO LE VARIABILI DA CONSIDERARE, PER OGNI BIT, NELLA SOMMA DI DUE NUMERI BINARI ?

- tre; i due valori che un bit nei due numeri può assumere e l'eventuale riporto dal bit di valore immediatamente inferiore. (36)
- due e cioé il valore dei bit nei due numeri in esame. (74)
- otto. (5)

25. QUALE (O QUALI) DELLE SEGUENTI MAPPE CORRISPONDE ALLA ESPRESSIONE :

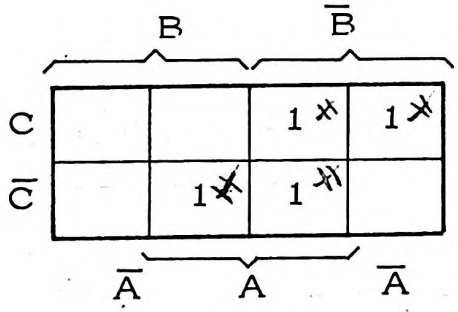
$$AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$$

-



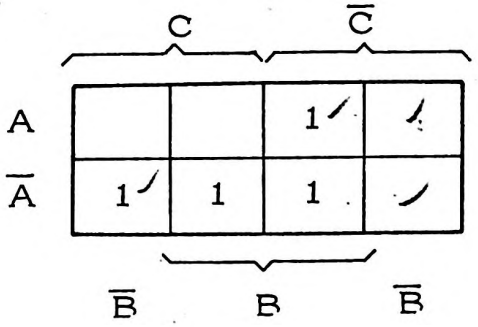
(68)

-



(49)

-



(8)

26. L'ADDIZIONE DEI DUE NUMERI BINARI

10101 , 00111

DA' COME RISULTATO : 11100

- 11000. (40)
- 10010. (16)
- 11100. (37)

27. CHE COSA E' UNA COMBINAZIONE BINARIA ?

- una successione di 1 e 0. (48)
- é un insieme di cifre binarie unite da un operatore booleano. (69)

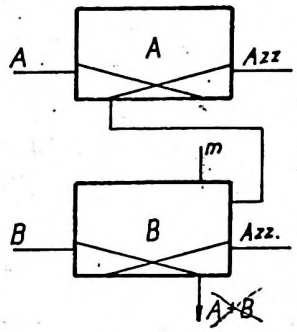
28. HA IMPORTANZA L'ORDINE CON IL QUALE SO NO DISPOSTI I BIT DI UN CARATTERE ?

- Si, perché per convenzione, essi sono disposti in ordine crescente da destra verso sinistra. (58)
- No. (57)

29. NEL SISTEMA DI NUMERAZIONE BINARIO :

- si usano due simboli, 1 e 0, che rappresentano i coefficienti per i quali possono essere moltiplicati i pesi binari. (4)
- i simboli utilizzati corrispondono con gli esponenti che possono assumere le potenze in base due. (57)

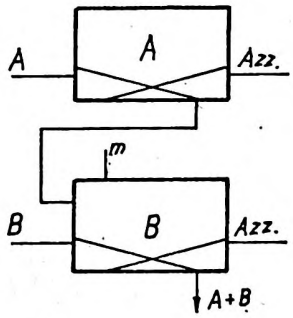
30. QUALE TRA I SEGUENTI CIRCUITI REALIZZANO LA FUNZIONE LOGICA DELL' OPERATORE BOOLEANO + ? + = OR

- 

(45)

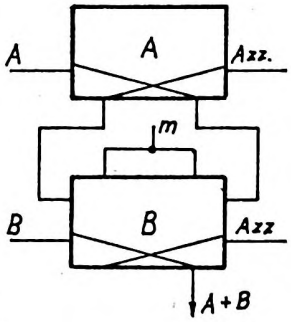
AND

se A·B Rofo valutazione M

- 

(24)

OR

- 

(43)

$\bar{A} + B$?

31. L'OPERATORE BOOLEANO + CORRISPONDE AD UN CIRCUITO :

- parallelo ed é utilizzato per rappresentare la funzione logica di un circuito OR. (42)
- serie ed é utilizzato per rappresentare la funzione logica di un circuito AND. (19)
- inverter. (44)

32. SI VEDA LA LEZIONE 2.

33. SI VEDANO LE LEZIONI 5 E 6.

34. LE REGOLE DELLA ADDIZIONE CON NUMERAZIONE IN BASE 2 SONO LE SEGUENTI :

- 0+1 = 1 , 1 + 0 =1 , 0 + 0 = 0 , 1 + 1= 2. (50)
- 0 + 1 =1 , 1 + 0 = 1 , 0 + 0 =0 , 1 + 1 = 1 con un riporto. (21)
- 1 + 1 =0 con un riporto, 0 + 0 = 0 , 0 + 1 = 1 , 1 + 0 =1. (15)

35. UN CIRCUITO OR ESCLUSIVO, A DUE INGRESSI A e B, PUO' ESSERE RAPPRESENTATO CON LA SEGUENTE ESPRESSIONE LOGICA :

- A + B. (10)
- $A\bar{B} + \bar{A}B$. (73)
- $A \oplus B$. (41)

36. FINE DEL RIEPILOGO.

37. LA SEGUENTE SOTTRAZIONE BINARIA

10101 - 00010

DA' PER RISULTATO :

10101
00010
10011

- 10011. (48)
- 10111. (3)
- 10101. (46)

38. SI VEDA LA RISPOSTA 75 E QUINDI SI RISPONDA NUOVAMENTE ALLA DOMANDA 9.

39. SI VEDA LA LEZIONE 1.

40. QUALE RISULTATO SI OTTIENE CON LA SEGUENTE ADDIZIONE BINARIA ?

1 + 1 + 1

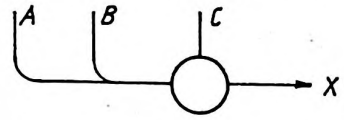
- 1 con un riporto. (56)
- 0 con un riporto. (64)

41. LA RISPOSTA E' ESATTA. SI RICORDI CHE UN OR ESCLUSIVO PUO' ESSERE RAPPRESENTATO IN MODO INDIFFERENTE CON UNA DELLE :

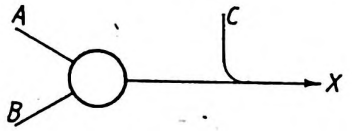
- $A \oplus B$, $A\bar{B} + \bar{A}B$. (30)

42. QUALE (O QUALI) DEI SEGUENTI CIRCUITI REALIZZA LA SEGUENTE ESPRESSIONE

$$X = (A + B)\,C\ ?$$

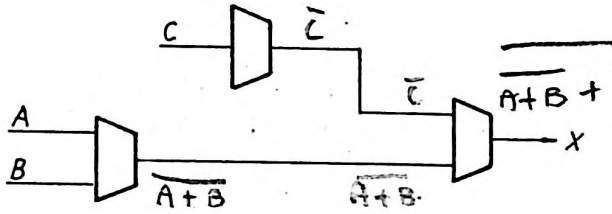


(65)



(6)

NOR



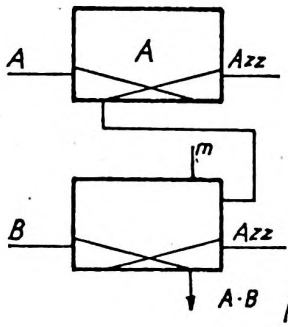
$\overline{\overline{A+B}+\bar{C}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot\bar{\bar{C}} = (A+B)\cdot C$

(22)

43. SI VEDA LA LEZIONE 7.

44. SI VEDA LA LEZIONE 4.

45. L'AND A FLIP-FLOP E' REALIZZATO CON IL SEGUENTE CIRCUITO :



AND

quindi la risposta esatta della domanda 30 è la seconda. (30)

46. SI VEDA LA LEZIONE 2.

47. QUALE DELLE SEGUENTI RISPOSTE E' ESATTA ?

- $\bar{C}D + CD = D(\bar{C} + C) = D.$ (71)
- l'espressione $\bar{C}D + CD$ non può essere semplificata. (33)

48. SI DEFINISCE CODICE BINARIO :

- una successione di 1 e di 0 che corrisponde a un solo simbolo .(27)
- ogni sistema di rappresentazione binaria di un certo numero di simboli. (9)

49. LA RISPOSTA ESATTA NON E' SOLTANTO QUELLA INDICATA; E' ESATTA ANCHE LA PRIMA DELLA STESSA DOMANDA 25. (35)

50. LA RISPOSTA E' ERRATA. (29)

51. LA RISPOSTA E' ESATTA, QUINDI NELLA SOMMA DI DUE NUMERI BINARI, LE VARIABILI DA CONSIDERARE SONO TRE. (25)

52. QUALE VALORE ASSUME LA CIFRA X NEI SEGUENTI NUMERI ?

IX , XI

- valore nove nel numero IX, valore undici nel numero XI. (57)
- in entrambi i numeri il valore 10. (12)

53. LA RISPOSTA E' ESATTA, QUINDI, SOTTRAENDO DUE BIT, DI EGUALE VALORE, SI OTTIENE 0 SENZA NESSUN RIPORTO. (15)

54. LA RISPOSTA E' ESATTA. CON L'OPERATORE BOOLEANO + SI PUO' RAPPRESENTARE SIA UN CIRCUITO PARALLELO CHE UN CIRCUITO OR. (63)

55. LA RISPOSTA E' ERRATA. SI VEDA UN LIBRO DI ALGEBRA ELEMENTARE.

56. LA RISPOSTA E' ESATTA. QUINDI LA ADDIZIONE DELLA DOMANDA 26 NON PUO' ESSERE 11000. (26)

57. SI VEDA LA LEZIONE 1.

58. COME E' DENOMINATO IL PRIMO BIT A DESTRA DI UN CARATTERE ?

- a. (20)
- e. (62)

59. SI VEDA LA LEZIONE 6.

60. SI VEDA LA LEZIONE 1.

61. SI VEDA LA LEZIONE 4.

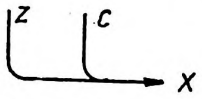
62. LA RISPOSTA E' ERRATA SI VEDA LA LEZIONE 1 (paragr. 1.3.) E LA LEZIONE 3.

63. SI RISPONDA NUOVAMENTE ALLA DOMANDA 31.

64. SI VEDA LA LEZIONE 2.

65. LA RISPOSTA E' ESATTA, MA CON LA STESSA ESPRESSIONE LOGICA SI PUO' RAPPRESENTARE ANCHE IL CIRCUITO NOR RIPORTATO NELLA TERZA RISPOSTA DELLA STESSA DOMANDA 42. (13)

66. LA RISPOSTA E' ESATTA. SE ORA SI COLLEGA IL SEGNALE Z ALL'INGRESSO DI UN CIRCUITO OR NEL SEGUENTE MODO :



L'USCITA X E' RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE ESPRESSIONE :

- X = ZC. (61)
- X = Z + C. (42)

67. LA RISPOSTA E' ESATTA. SOMMANDO DUE BIT A VALORE 1 SI OTTIENE IL VALORE ZERO CON UN RIPORTO VERSO IL BIT DI VALORE IMMEDIATAMENTE SUPERIORE. (15)

68. LA RISPOSTA ESATTA NON E' SOLTANTO QUELLA INDICATA ; E' ESATTA ANCHE ~~LA TERZA~~ DELLA STESSA DOMANDA 25. (35)

2°

69. SI VEDANO LE LEZIONI 3 E 4.

70. LA RISPOSTA E' ESATTA. (13)

71. LA RISPOSTA E' ESATTA, QUINDI, L'ESPRESSIONE DELLA DOMANDA 13 NON E' ULTERIORMENTE SEMPLIFICABILE QUANDO E' SCRITTA NEL SEGUENTE MODO :

A + B + D. (25)

72. SI RIVEDA LA DOMANDA 25.

73. LA RISPOSTA E' ESATTA. CON QUALE SIMBOLO SI INDICA L'OPERATORE DETTO OR ESCLUSIVO ?

- ⊕ (41)
- non esiste nessun simbolo. (10)

74. NELLA SOMMA DEI DUE NUMERI BINARI

Bit B. Bit A

X = 0101

Y = 0011

A = 1000

PER STABILIRE IL VALORE DEL RISULTATO DEL BIT B SI DEVE CONSIDERARE ANCHE IL RIPORTO PROVENIENTE DALLA SOMMA DEI BIT A ?

- Si. ~~(57)~~ (51)
- No. ~~(52)~~ (5)

75. OGNI POTENZA IN BASE DUE HA, IN FUNZIONE DEL VALORE DELL'ESPONENTE, UN DIVERSO VALORE DEFINITO PESO BINARIO. SI DEFINISCE BIT LA CIFRA CHE IN NUMERO BINARIO RAPPRESENTA UN PESO BINARIO PUO' ASSUMERE I VALORI : 1 o 0. (34)

CORSI DI ISTRUZIONE PROGRAMMATA

INTRODUZIONE AGLI ELABORATORI ELETTRONICI

1. Transistori
2. Logica
3. Memoria a nuclei
4. Oscilloscopio

SISTEMA GE - 115

1. Organi logici
2. Programmazione
3. Memoria a nuclei
4. Unità Centrale vol. 1°
5. Unità Centrale vol. 2°
6. Unità Centrale vol. 3°
7. G.U.N. 7
8. Governo MZ4 - 300

M.T.E. - 2

1. Il calcolatore M.T.E. - 2

GENERAL ELECTRIC è marchio registrato della GENERAL ELECTRIC COMPANY U.S.A.